PERIODICAL
UNIVERSITY OF NORTH
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

59. BAND, 2. HEFT
MIT 1 TEXTABBILDUNG
(AUSGEGEBEN IM MAI 1955)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1955

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

59. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Fan, Ky, Taussky, Olga and **Todd, J.** Discrete analogs of inequalities of Wirtinger 73

Prachar, K. Über die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl, welche die Form $p - 1$ haben. 91

Prachar, K. Über die Lösungszahl eines Systems von Gleichungen in Primzahlen 98

Kantz, G. Über den Typus eines Zerlegungsringes 104

Wunderlich, W. Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades 111

Nöbauer, W. Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten 118

Buchbesprechungen 146

Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*.

By

Ky Fan, Olga Taussky*** and **John Todd***.**

(Received September 3, 1954.)

In the theory of inequalities there are often encountered inequalities which are first proved for finite series and then established for infinite series or integrals. We shall discuss here the finite analogs of several integral inequalities which appear to have been established directly.[1] There is often the added interest in the finite case of considering whether or not an improvement in the constants is possible (cf. *H. Frazer* [7]).

In § 1 we discuss the integral inequalities with which we shall be concerned. In § 2 we discuss the discrete analogs of those involving functions and their first derivatives and in § 3 those involving functions and their second derivatives. In these cases best possible constants have been obtained. In §§ 4, 5 we handle, by different methods, the analogs of results of *Bellman* and *Northcott*. In the latter case the best possible constants are given.

The results which we have obtained can be extended in several directions, to some of which we shall return elsewhere. The extension to the case of higher derivatives becomes untidy in view of the complications at the endpoints (cf. *J. Todd* [14]). Problems involving higher powers of the function do not yield to the present treatment, although the best possible results in the continuous case have been secured by

* This research was partially supported by the United States Air Force, through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command. It was performed in part under a contract between the American University and the National Bureau of Standards.

** American University and University of Notre Dame.

*** National Bureau of Standards, Washington, 25, D. C.

[1] Professor *G. Pólya* pointed out to us that a certain discrete analog of *Wirtinger's* inequality has been given by *W. Blaschke* [16, pp. 13—20]. He proved the following result.

If L is the length of an equilateral polygon with n sides and A its area then $L^2 > 4n \tan(\pi/n)$. A unless the polygon is regular.

use of genuine calculus of variation methods. It is possible to consider more elaborate quadratures than the simple ones discussed here: in this event proper matching with the finite difference approximation to the derivative seems necessary. We note that the characterization of the least characteristic value of a *Sturm-Liouville* problem such as

$$(pu')' - qu + \lambda \varrho\, u = 0,\ u(0) = u(\pi) = 0$$

as the minimum of

$$\frac{\int_0^{\pi} (py'^2 + qy^2)\, dx}{\int_0^{\pi} \varrho y^2\, dx}$$

suggests generalizations of our theorems; these can be obtained, but precise results on the constants cannot, in general, be secured. Some results in this direction have been obtained by *G. E. Forsythe;* see also *H. Bückner* [17].

We note that the two-dimensional analogs of the theorems have physical significance (*Pólya* and *Szegö* [11]) and that the corresponding discrete problems have been handled by *Forsythe* [5, 6]. *Pólya* and *Szegö* discuss

$$\iint f^2\, dxdy \leqslant A^{-2} \iint (f_x^2 + f_y^2)\, dxdy$$

where $f = 0$ on the boundary C of the domain of integration D: A is the principal frequency of the "membrane" D. *Forsythe* discusses the relation between A and A_h, the corresponding constant in the discrete case with mesh side h, when D is convex. He shows that $A_h < A$ for all sufficiently small h. Results of this type can be obtained in the case of a square by use of ideas of *Rutherford* [13, p. 232] and *Williamson* [15].

1. Inequalities in the continuous case.

The following three results are established in *Hardy, Littlewood* and *Pólya* [8, p. 184—7]; the last is ascribed to *Wirtinger* (*F. W. Blaschke* [16, p. 105]). Conventionally, we omit stating explicitly such implicit hypotheses as $x \varepsilon L^2$, $x' \varepsilon L^2$, whenever $\int x^2\, dt$, $\int x'^2\, dt$ appear explicitly in the statement.

Theorem 1. *If* $x(0)=0$, *then*

$$\int_0^{1/2\pi} x^2 dt < \int_0^{1/2\pi} x'^2 dt,$$

unless $x = A \sin t$.

Theorem 2. *If* $x(0) = x(\pi) = 0$, *then*

$$\int_0^{\pi} x^2 dt < \int_0^{\pi} x'^2 dt$$

unless $x = A \sin t$.

Theorem 3. *If* x *has period* 2π *and* $\int_0^{2\pi} x\, dt = 0$, *then*

$$\int_0^{2\pi} x^2 dt < \int_0^{2\pi} x'^2 dt$$

unless

$$x = A \cos t + B \sin t.$$

We now mention two results comparing the integral of the square of a function with that of the square of the second derivative.

Theorem 4. *If* $x(0) = x(\pi) = 0$ *and if* $x' \in L^2$, *then*

$$\int_0^{\pi} x^2\, dt < \int_0^{\pi} x''^2\, dt$$

unless

$$x = A \sin t.$$

Proof. Integrating by parts we find

$$\int_0^{\pi} (x''^2 - x^2)\, dt = \int_0^{\pi} (x'' + x)^2\, dt - 2 \int_0^{\pi} (x\, x'' + x^2)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (x'' + x)^2\, dt - [2xx']_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} (x'^2 - x^2)\, dt.$$

The middle term vanishes since $x(0) = x(\pi) = 0$; and from Theorem 2 we have

$$2 \int_0^{\pi} (x'^2 - x^2)\, dt > 0$$

unless

$$x = C \sin t.$$

Again

$$\int_0^{\pi} (x'' + x)^2\, dt > 0$$

unless

$$x'' + x = 0,$$

which implies

$$x = A \cos t + B \sin t.$$

Combining these results gives Theorem 4.

Theorem 5. *If* $x'(0) = x'(\pi) = 0$, *and* $\int_0^\pi x\,dt = 0$ *and if* $x' \varepsilon L^2$, *then*

$$\int_0^\pi x^2\,dt < \int_0^\pi x''^2\,dt$$

unless

$$x = A\cos t.$$

Proof. From Theorem 2, replacing x by x', we obtain

$$\int_0^\pi x'^2 dt < \int_0^\pi x''^2 dt \tag{1.1}$$

unless $x' = C_1 \sin t$, *i. e.* $x = C_2 \cos t + D$. The hypothesis $\int_0^\pi x\,dt = 0$ requires $D = 0$. Next, if we specialize Theorem 3, and further require that

$$x(\pi + t) = x(\pi - t), \quad 0 < t \leqslant \pi \tag{1.2}$$

we conclude that

$$\int_0^{2\pi} x^2\,dt < \int_0^{2\pi} x'^2\,dt$$

unless

$$x = A\cos t + B\sin t.$$

In virtue of (1.2), we must have $B = 0$; and we conclude that

$$\int_0^\pi x^2\,dt < \int_0^\pi x'^2\,dt \tag{1.3}$$

unless

$$x = A\cos t.$$

Combining (1.1) and (1.3) we obtain the result stated.

We note that the last two results *cannot* be obtained by repeated application of Theorem 2.

We conclude by mentioning results concerning higher derivatives. *Bellman* [1], following *Northcott* [9], established

Theorem 6. *If* $x(t) = x(t + 2\pi)$, *if* $x(t), x'(t), \ldots, x^{(k+1)}(t)$ *all exist and if* $x^{(k-1)}(t)$ *is the integral of a function in* $L^{2r}(0, 2\pi)$, *and if* $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$, *then*

$$\int_0^{2\pi} \{x(t)\}^{2r}\,dt \leqslant a_k^{2r} \int_0^{2\pi} \{x^{(k)}(t)\}^{2r}\,dt,$$

where r is a positive integer and a_k are certain constants e. g. $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = \frac{\pi^2}{8}$, $a_3 = \frac{\pi^3}{24}$, ...

This result for $k=1$, $r=1$ is weaker than Theorem 3, for $a_1^2 = \pi^2/4 > 1$. We return to this point in § 4.

We now state a result of *Northcott* [9], which can be obtained by a standard limiting process from Theorem 6.

Theorem 7. *If* $x(t) = x(t + 2\pi)$, *if* $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{(k-1)}(t)$ *are absolutely continuous and if* $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0$, *then*

$$\max |x(t)| \leqslant a_k \max |x^{(k)}(t)|,$$

where the a_k are the same constants as in Theorem 6. Moreover this result is best possible: for any k there is an x for which the equality is attained.

2. Discrete case, first derivatives.

The main tool we use in §§ 2, 3 is the following basic fact (cf. [4], pp. 23ff.) about the characteristic values of Hermitian matrices. Let H be a Hermitian matrix of order n, with characteristic values $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, and let $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be n corresponding linearly independent characteristic vectors: $H v_i = \lambda_i v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Then

$$(Hx, x) \geqslant \lambda_n (x, x)$$

holds for every vector x in the unitary n-space. In case $\lambda_{n-1} > \lambda_n$, the equality

$$(Hx, x) = \lambda_n (x, x)$$

is satisfied if and only if x is a scalar multiple of v_n.

Similarly, for any vector x orthogonal to v_n, we have

$$(Hx, x) \geqslant \lambda_{n-1} (x, x).$$

In case $\lambda_{n-3} > \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} > \lambda_n$, then a vector x orthogonal to v_n satisfies the equality

$$(Hx, x) = \lambda_{n-1} (x, x)$$

if and only if x is a linear combination of v_{n-2} and v_{n-1}.

Theorem 8. *If* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are* n *real*[2] *numbers and* $x_1 = 0$, *then*

[2] From our proof, it is clear that this theorem (and also Theorems 9—12) remain valid for complex x_i: the appropriate conclusion here is that

$$\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|^2 > 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=2}^{n} |x_i|^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 > 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=2}^{n} x_i^2,$$

unless $x_i = A \hat{x}_i$ *where*

$$\hat{x}_i = \sin \frac{(i-1)\pi}{2n-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Proof: Our problem is to determine the minimum of

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 = 2x_2^2 + 2x_3^2 + \ldots + 2x_{n-1}^2 + x_n^2 -$$

$$- 2x_2 x_3 - 2x_3 x_4 - \ldots - 2x_{n-1} x_n,$$

where $x_2, x_3, \ldots,$ vary under the condition $\sum_{i=2}^{n} x_i^2 = 1$. According to the above remarks, this amounts to the determination of the least characteristic value and the corresponding characteristic vector of the $(n-1) \times (n-1)$ Hermitian matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

We use the result of *Rutherford* [12, p. 230] that

$$|\lambda J - H| = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n-1}).$$

Hence the characteristic values of H are distinct and the least one is

$$\lambda_{n-1} = 2(1 + \cos \frac{2(n-1)\pi}{2n-1}) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)}.$$

The characteristic vector corresponding to λ_{n-1} is easily verified to be $(\hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_n)$ as defined by (2.1). In view of the introductory remarks in this section, the results of Theorem 8 follow.

The result obtained can be written in the form

$$\left\{\frac{\frac{1}{2}\pi}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right\} < \left[\frac{\frac{1}{2}\pi/(n-1)}{2\sin\frac{1}{2}\pi/(2n-1)}\right]^2 \cdot \left\{\frac{\frac{1}{2}\pi}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(x_i - x_{i+1})}{\frac{1}{2}\pi/(n-1)}\right]^2\right\}. \tag{2.2}$$

If we let $n \to \infty$ we obtain Theorem 1, without the equality clause.

There is no difficulty in justifying this passage to the limit, under the following assumptions, for instance. Assume $x(t)$ defined on $(0, \frac{1}{2}\pi)$ and that $x'(t)$ exists in this interval. Assume also that x'^2 and x^2 are Riemann integrable over $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Write $t_i = \frac{1}{2}(i-1)\pi/(n-1)$ and use Theorem 8 with $x_i = x(t_i)$.

By the first mean value theorem, we have

$$x_{i+1} - x_i = (\tfrac{1}{2}\pi/(n-1))\, x'(\tau_i),\ t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}.$$

By standard theorems on the Riemann integral we can choose n so large that the sums in braces $\{\ \}$ in (2.2) are arbitrarily close to the corresponding integrals; also, for $n \to \infty$, the constant involved,

$$\left[\frac{\frac{1}{2}\pi/(n-1)}{2\sin\frac{1}{2}\pi/(2n-1)}\right]^2 = \left[\frac{2n-1}{2n-2}\, x\, \frac{\frac{1}{2}\pi/(2n-1)}{\sin\frac{1}{2}\pi/(2n-1)}\right]^2,$$

tends to unity from above.

Theorem 9. *If $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are n real numbers, then*

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 > 4\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{i=0}^{n} x_i^2$$

(where $x_0 = x_{n+1} = 0$) unless $x_i = A\,\hat{x}_i$, where

$$\hat{x}_i = \sin\frac{i\pi}{n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Proof. In this case we consider the $n \times n$ matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

The characteristic values of H are distinct [12, p. 230] and the least one is

$$\lambda_n = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)};$$

it is easy to verify that the corresponding characteristic vector is $\{\hat{x}_i\}$ as defined in (2.3).

From these facts the required result follows.

If we write this in the form

$$\left\{\frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i^2\right\} < \frac{\pi^2/4\,(n+1)^2}{\sin^2 \pi/2\,(n+1)} \left\{\frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{(x_i - x_{i+1})}{\pi/(n+1)}\right]^2\right\}$$

and let $n \to \infty$ we obtain Theorem 2, without the equality clause. Note that the constant tends to unity from above.

Theorem 10. *If* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ *are* $(n+1)$ *real numbers such that*

$$x_1 = x_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

then

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 > 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

unless

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Proof: What we require is

$$\min \{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2\}$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Consider the $n \times n$ matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Its characteristic values are [12, p. 234]

$$4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

If the characteristic values are denoted by $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, then

$$\lambda_n = 0, \quad \lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = 4 \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{n} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} < \lambda_{n-3}.$$

To the characteristic value $\lambda_n = 0$ there corresponds the characteristic vector

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

A vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is orthogonal to this, if and only if $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Hence the minimum sought is

$$\lambda_{n-1} = 4 \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{n} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Corresponding to this characteristic value there are *two* linearly independent characteristic vectors $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$ where

$$\bar{x}_i = \cos \frac{2\pi i}{n},$$

$$\bar{\bar{x}}_i = \sin \frac{2\pi i}{n}.$$

The result stated follows from the remarks at the beginning of this section.

The result obtained can be written in the form

$$\left\{\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} < \left[\frac{2\pi/n}{2 \sin \pi/n}\right]^2 \left\{\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i - x_{i+1}}{2\pi/n}\right]^2\right\}.$$

If we let $n \to \infty$ we obtain Theorem 3, without the equality clause. As before, the constant involved tends to unity from above.

3. Discrete case, second derivatives.

Theorem 11. *If $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are n real numbers, then*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2})^2 > 16 \sin^4 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} x_i^2$$

(where $x_0 = x_{n+1} = 0$), unless $x_i = A \hat{x}_i$ where

$$\hat{x}_i = \sin \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Proof. Since $x_0 = x_{n+1} = 0$, we have,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2})^2 = (2x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + \ldots + (x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n)^2 + (x_{n-1} - 2x_n)^2.$$

The $n \times n$ matrix corresponding to this quadratic form is

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

This matrix is the square of the matrix occurring in Theorem 9. The results stated follow, since the characteristic values of the square of a matrix are the squares of those of the matrix, and, in the case of a Hermitian matrix, the characteristic vectors are the same.

Passage to the limit in this gives Theorem 4, without the equality clause.

Theorem 12. *If* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are* n $(\geqslant 3)$ *real numbers such that*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

then

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2})^2 > 16 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

(where $x_0 = x_1$, $x_{n+1} = x_n$*), unless* $x_i = A\hat{x}_i$ *where*

$$\hat{x}_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Proof. Since $x_0 = x_1$, $x_{n+1} = x_n$, we have

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - 2\,x_{i+1} + x_{i+2})^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2\,x_2 + x_3)^2 + \ldots + \\ + (x_{n-2} - 2\,x_{n-1} + x_n)^2 + (x_{n-1} - x_n)^2.$$

The $n \times n$ matrix corresponding to this quadratic form is

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & & & & & & \\ -3 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -3 \\ & & & & & & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

This matrix is the square of the $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 1 & \end{pmatrix}$$

The characteristic values of this are [12, p. 230]

$$\lambda_k = 4 \cos^2 \frac{k\,\pi}{2\,n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

As in Theorem 10 the characteristic value $\lambda_n = 0$ is to be discarded in view of the (orthogonality) condition $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. The relevant characteristic value is

$$\lambda_{n-1} = 4 \cos^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$$

with characteristic vector $\{\hat{x}_i\}$ as defined by (3.1).

The results stated follow by the same arguments as used in Theorem 11.

Passage to the limit in this gives Theorem 5, without the equality clause.

4. Discrete analogs of Bellman's inequalities.

We confine our attention to the cases $k = 1, 2$ of Theorem 6. Our results, however, are true for arbitrary integral $r > 0$, not necessarily even.

Theorem 13. *If $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are n complex numbers such that*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

then for any positive integer r, we have

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leqslant \{a_1(n)\}^r \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}|^r \tag{4.1}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leqslant \{a_2(n)\}^r \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}|^r, \tag{4.2}$$

where

$$x_0 = x_n, \; x_{n+1} = x_1,$$

and

$$a_1(n) = \tfrac{1}{2}(n-1), \; a_2(n) = \frac{1}{12}(n^2 - 1).$$

Our proof runs parallel to that of *Bellman*. We require two lemmas, in both of which all numbers may be real or complex.

Lemma 1. *If $x_1, x_2, \ldots$ is a periodic sequence of period n and if*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

then

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (x_{i+k-1} - x_{i+k}) \frac{n-k}{n}, \tag{4.3}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (x_{i+k-1} - 2x_{i+k} + x_{i+k+1}) \frac{k(n-k)}{2n}. \tag{4.4}$$

Proof: Both of these results are established by partial summation; the first by simple partial summation, and the second by double partial summation.

Lemma 2. *If* $u_1, u_2, \ldots$ *is a periodic sequence with period* n *and if, for any set of* n *numbers* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *we have*

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} u_{i+k} v_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.5}$$

then, for any positive integer r, *we have*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^r \right) \left\{ \sum_{k=1}^{n} |v_k| \right\}^r. \tag{4.6}$$

Proof: We use *Hölder's* inequality [8, p. 22]. In fact

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_{i+k} v_k \right|^r \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |u_{i+k}| \, |v_k| \right\}^r =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_r=1}^{n} |u_{i+k_1}| \cdots |u_{i+k_r}| \, |v_{k_1}| \cdots |v_{k_r}| =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_r=1}^{n} \left[\left\{ \sum_{i=1}^{n} |u_{i+k_1}| \cdots |u_{i+k_r}| \right\} |v_{k_1}| \cdots |v_{k_r}| \right]$$

$$\leqslant \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_r=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |u_{i+k_1}|^r \right)^{1/r} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} |u_{i+k_r}|^r \right)^{1/r} |v_{k_1}| \cdots |v_{k_r}| \right\}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^r \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k| \right)^r.$$

Proof of (4.1). We observe that (4.3) is in the form (4.5). We can therefore apply Lemma 2 to obtain

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i|^r \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} \right)^r$$

which is (4.1) with

$$a_1(n) = \tfrac{1}{2}(n-1).$$

Proof of (4.2). Similarly, by applying Lemma 2 to (4.4), we obtain

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}|^r \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{2n} \right)^r,$$

which is (4.2) with

$$a_2(n) = \frac{1}{12}(n^2 - 1).$$

This completes the proof of Theorem 13.

Passage to the limit ($n \to \infty$) in Theorem 13 gives results of the form of Theorem 6, with $a_1 = \frac{1}{2}\pi$ replaced by $\lim 2\pi a_1(n)/n = \pi$ and with $a_2 = \frac{1}{8}\pi^2$ replaced by $\lim 4\pi^2 a_2(n)/n^2 = \frac{1}{3}\pi^2$.

The above theorem remains valid if $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are elements in an arbitrary normed (real or complex) vector space, provided $|\ \ |$ is replaced by the norm $\|\ \ \|$. In this connection it is to be observed that the results obtained earlier (Theorems 8, 9, 10 for instance) can be generalized to elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in a unitary space of arbitrary finite dimension (with the same constant factors, but with some easy modifications concerning the equality cases), but not in an arbitrary normed vector space. This explains why the present results are weaker than the earlier ones.

Instead of applying Lemma 2, which is based on *Hölder*'s inequality, we could apply *Young*'s inequality [8, p. 199], and obtain different results.

5. Discrete analogs of Northcott's inequalities.

If we take the r-th root of both sides of the two relations (4.1), (4.2) and then let $r \to \infty$, we obtain the following result, using standard facts about mean values [8, p. 15].

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i| \leqslant a_1(n) \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i - x_{i+1}|.$$

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i| \leqslant a_2(n) \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}|,$$

where $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$, and $a_1(n) = \frac{1}{2}(n-1)$, $a_2(n) = (n^2-1)/12$.

These two inequalities are discrete analogs of Theorem 7, for $k = 1, 2$. We shall improve the first of these by replacing $a_1(n) = \frac{1}{2}(n-1)$ by the best possible constant. Consider first the case of real numbers. We shall prove the following result[3].

Theorem 14. *If n ($\geqslant 2$) real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vary subject to the conditions*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \tag{5.1}$$

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i| = 1, \tag{5.2}$$

and if $x_{n+1} = x_1$, then the minimum of

[3] For a related (continuons) result see *Ostrowski* [10].

$$\mu = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - x_{i+1} | \tag{5.3}$$

is

$$\frac{4}{n} \text{ if } n \text{ is even}, \quad \frac{4n}{n^2 - 1} \text{ if } n \text{ is odd}.$$

Proof. The existence of this minimum is clear. In fact (5.1), (5.2) define a bounded closed set in the Euclidean n-space and μ is a continuous function of $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Let $\varrho = \varrho(n)$ be this minimum, and let $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ be a minimizing set, i. e.

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 0, \tag{5.4}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_i | = 1, \tag{5.5}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_i - \hat{x}_{i+1} | = \varrho. \tag{5.6}$$

Let k be an index such that

$$| \hat{x}_k | = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_i | = 1.$$

We may assume that

$$\hat{x}_k = 1, \tag{5.7}$$

for otherwise we can use $-\hat{x}_1, -\hat{x}_2, \ldots, -\hat{x}_n$ instead of $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$. We observe that (5.4), (5.5), (5.6) remain unchanged if we renumber the $\hat{x}_i$'s without destroying their cyclic order. We can therefore assume that

$$k = \tfrac{1}{2} n \text{ if } n \text{ is even}, \quad k = \tfrac{1}{2}(n+1) \text{ if } n \text{ is odd}. \tag{5.8}$$

For $i > k$, we have, from (5.6)

$$\hat{x}_k - \hat{x}_i \leqslant | \hat{x}_k - \hat{x}_{k+1} | + | \hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+2} | + \ldots + | \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i | \leqslant$$
$$\leqslant (i-k)\, \varrho = \varrho\, | i-k |.$$

Again, for $i < k$ we have

$$\hat{x}_k - \hat{x}_i \leqslant | \hat{x}_i - \hat{x}_{i+1} | + | \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+2} | + \ldots + | \hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k | \leqslant$$
$$\leqslant (k-i)\, \varrho = \varrho\, | i-k |.$$

Hence

$$\hat{x}_k \leqslant \hat{x}_i + \varrho\, | i-k |, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.9}$$

Summing (5.9) over $i = 1, 2, \ldots, n$ and using (5.4), (5.7) we get

$$n \leqslant \varrho \sum_{i=1}^{n} | i-k | = \varrho \left(\sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{n-k} i \right)$$

or

$$2n \leqslant \varrho\,[(k-1)\,k + (n-k)\,(n-k+1)].$$

Combining this with (5.8) we obtain

$$\varrho \geqslant 4/n \text{ if } n \text{ is even}, \quad \varrho \geqslant 4n/(n^2-1) \text{ if } n \text{ is odd}. \tag{5.10}$$

It remains to verify that the equalities in (5.10) are actually realized.

Consider first the case of n even. Write

$$\varrho = 4/n, \quad y_i = -1 + (i-1)\,\varrho, \quad 1 \leqslant i \leqslant \tfrac{1}{2}n + 1.$$

Define

$$x_i = y_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \tfrac{1}{2}n + 1,$$

$$x_i = y_{n+2-i}, \qquad \tfrac{1}{2}n + 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Then (5.1) and (5.2) are satisfied and

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i+1}| = \varrho.$$

Consider next the case of n odd, say $n = 2l + 1$. Write

$$\varrho = 4n/(n^2-1) = (2l+1)/l\,(l+1), \quad y_i = 1 - (l-i+1)\,\varrho, \quad 1 \leqslant i \leqslant l + 1.$$

Define

$$x_i = y_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l + 1,$$

$$x_i = y_{2l+2-i}, \qquad l + 2 \leqslant i \leqslant 2l + 1.$$

Then (5.1) and (5.2) are satisfied and

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i+1}| = \varrho.$$

This establishes Theorem 14. We proceed now to some generalizations in which the points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of Theorem 14, which were originally restricted to vary on a line, are now permitted to vary first in an m-dimensional Euclidean space E_m (with the usual norm) and second in a m-dimensional vector space V_m on which the norm is defined as the maximum absolute value of the coordinates. In each case the value of the minimum is the same as that in the linear case.

In the first case we consider points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in E_m and replace the absolute value in (5.2), (5.3) by the norm $\| X \| = (\sum_{j=1}^{m} x_j^2)^{1/2}$ for $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Let ϱ_1 denote the minimum in question; let

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \ldots, \hat{x}_{im}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

be a minimizing set. We can assume that

$$\| \hat{X}_1 \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \hat{X}_i \| = 1.$$

We can further assume, by an orthogonal transformation, that

$$\hat{X}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Consider the n real numbers

$$\hat{x}_{11} = 1, \ \hat{x}_{21}, \ \hat{x}_{31}, \ \ldots, \ \hat{x}_{n1},$$

which are the first coordinates of $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$. These satisfy the conditions of Theorem 14. It follows that

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_{i,1} - \hat{x}_{i+1,1} | \geqslant \varrho,$$

where $\varrho = 4/n$ or $\varrho = 4n/(n^2-1)$ according as n is even or odd. But

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \hat{X}_i - \hat{X}_{i+1} \| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_{i,1} - \hat{x}_{i+1,1} |.$$

Hence

$$\varrho_1 \geqslant \varrho.$$

Since $\varrho_1 \leqslant \varrho$ because we can imbed the real line in E_m, it follows that $\varrho_1 = \varrho$.

In the second case, we consider points $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ in V_m and replace the absolute value in (5.2), (5.3) by the norm

$$\| X \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} | x_i | \text{ for } X = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Let ϱ_2 denote the minimum in question; let

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \ldots, \hat{x}_{im}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

be a minimizing set. We can then choose two indices i_0, j_0 with $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, $1 \leqslant j_0 \leqslant m$, such that

$$| \hat{x}_{i_0, j_0} | = 1.$$

Consider the n real numbers

$$\hat{x}_{1, j_0}, \hat{x}_{2, j_0}, \ldots, \hat{x}_{n, j_0},$$

the j_0-th coordinates of the points $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$. These satisfy the conditions of Theorem 14 and it follows that

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_{i, j_0} - \hat{x}_{i+1, j_0} | \geqslant \varrho.$$

But

$$\varrho_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \hat{X}_i - \hat{X}_{i+1} \| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \hat{x}_{i, j_0} - \hat{x}_{i+1, j_0} |.$$

Hence $\varrho_2 \geqslant \varrho$ and since, as before, $\varrho_2 \leqslant \varrho$, we have $\varrho_2 = \varrho$.

The construction of minimizing sets is not difficult. We record such sets for $n = 3, 4, 5, 6, 7$ in the case of V_2.

$n = 3$, $\varrho = 3/2$: $(1,0)$, $(-1/2, 3/4)$, $(-1/2, -3/4)$.

$n = 4$, $\varrho = 1$: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$.

$n = 5$, $\varrho = 5/6$: $(1,0)$, $(1/6, 5/6)$, $(-2/3, 5/12)$, $(-2/3, -5/12)$, $(1/6, -5/6)$.

$n = 6$, $\varrho = 2/3$: $(1,0)$, $(1/3, 2/3)$, $(-1/3, 2/3)$, $(-1,0)$, $(-1/3, -2/3)$, $(1/3, -2/3)$.

$n = 7$, $\varrho = 7/12$: $(1,0)$, $(5/12, 7/12)$, $(-1/6, 7/12)$, $(-3/4, 7/24)$, $(-3/4, -7/24)$, $(-1/6, -7/12)$, $(5/12, -7/12)$.

References.

1. *R. Bellman*, A note on periodic functions and their derivatives, Journal London Math. Soc. **18**, 1943, 140—142.
2. *L. Collatz*, Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung, Deutsche Math. **2**, 1937, 189—215.
3. *L. Collatz*, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung (Leipzig, 1945. Akad. Verlag).
4. *R. Courant* and *D. Hilbert*, Methods of mathematical physics, I (New York, 1953).
5. *G. E. Forsythe*, Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes, Pacific J. Math. **4**, 1954, 467—480.
6. *G. E. Forsythe*, Asymptotic lower bounds for the fundamental frequency of convex membranes, Pacific J. Math., to appear.
7. *H. Frazer*, Note on *Hilbert*'s inequality, Journal London Math. Soc. **21**, 1946, 7—9.
8. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya*, Inequalities (Cambridge, England {1}, 1934, {2}, 1952).
9. *D. G. Northcott*, Some inequalities between periodic functions and their derivatives, Journal London Math. Soc. **14**, 1939, 198—202.
10. *A. M. Ostrowski*, Über die Absolutabweichung einer differentierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert, Comm. Mat. Helvetici, **10**, 1937—8, 226—227.
11. *G. Pólya* and *G. Szegö*, Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Annals of Math. Studies **27**, 1951, (Princeton Univ. Press, Princeton, USA).
12. *D. E. Rutherford*, Some continuant determinants arising in physics and chemistry, I, Proc. Royal Soc. Edinburgh. **62A**, 1947, 229—236.
13. *D. E. Rutherford*, Some continuant determinants arising in physics and chemistry, II, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **63A**, 1952, 232—241.
14. *John Todd*, The condition of certain matrices, II, Archiv d. Math. **5**, 1954, 249—257.
15. *J. Williamson*, The latent roots of a matrix of special type, Bulletin American Math. Soc. **37**, 1931, 585—590.
16. *W. Blaschke*, Kreis und Kugel (Leipzig 1916, New York, 1949).
17. *H. Bückner*, Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben, Math. Zeit. **51**, 1948, 423—465.

Über die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl, welche die Form $p-1$ haben.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 19. Oktober 1954.)

1.

Sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler, $\delta(n)$ die Anzahl der Teiler von der Form $p-1$, der natürlichen Zahl n, wobei mit p allgemein ungerade Primzahlen bezeichnet werden. Die Funktion $\delta(n)$ ist kürzlich bei einer gruppentheoretischen Untersuchung aufgetreten (vgl. *W. Nöbauer*, Monatshefte f. Math. 58 (1954), S. 190).

Bekanntlich gilt

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x \log x + (2C-1)\, x + 0\,(\sqrt{x})^{1} \tag{1}$$

und

$$d(n) > 2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n},\ \varepsilon > 0 \text{ fest}, \tag{2}$$

für unendlich viele n.

In dieser Arbeit zeigen wir

Satz 1: Es ist

$$\sum_{n\leq x} \delta(n) = x \log\log x + Bx + 0\,(\frac{x}{\log x}), \tag{3}$$

B eine Konstante.

Satz 2: Für unendlich viele n ist[2]

$$\delta(n) > \exp\,(c\,\frac{\log n}{(\log\log n)^2}) \tag{4}$$

bei passendem $c > 0$. (Wie üblich, bezeichnen wir positive Konstanten mit c).

---

[1] C-Eulersche Konstante.

[2] Wenn loglog M vorkommt, so soll automatisch $M > e$ vorausgesetzt werden.

Beim Beweis von Satz 2 wird ein Satz von *Rodosski* benötigt, der auch von *Tatuzawa* bewiesen wurde (vgl. z. B. *Tatuzawa*, Jap. Journ. of Math. 21 (1951) 93. Über die Beweismethode vgl. z. B. *P. Erdös*, Quaterly Journal **7**, (1936) 227).

(3) und (4) lassen eine merkwürdig starke Unregelmäßigkeit in der Verteilung der Werte von $\delta(n)$ erkennen. Wir zeigen noch weiter

Satz 3: Wenn die Riemann'sche Vermutung für die Dirichtlet'schen L-Reihen richtig ist, so gilt sogar

$$\delta(n) > 2^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\log n/\log\log n} \tag{5}$$

für unendlich viele n.

Unter Annahme der Riemann'schen Vermutung folgt also, daß $\delta(n)$ „im wesentlichen" ebenso groß werden kann wie $d(n)$, während es im Mittel nach Satz 1 „viel kleiner" ist als $d(n)$.

Es ist wohlbekannt, daß

$$\sum_{n\leqq x} d^2(n) \sim c\, x \log^3 x.$$

Wir beweisen noch

Satz 4: Es gilt

$$\sum_{n\leqq x} \delta^2(n) = 0\,(x \log^2 x)$$

Der Beweis von Satz 4 wird durch Verwendung von Hilfssatz 2 (unten) ermöglicht, welcher mittels der Brun'schen Siebmethode bewiesen werden kann, was wir aber hier nicht durchführen wollen.

2.

Beweis von Satz 1: Wir setzen zur Abkürzung $\log x = Lx, \log\log x = L_2 x$, usw. Dann ist

$$\sum_{n\leqq x} \sum_{p-1/n} 1 = \sum_{p\leqq x+1} \left[\frac{x}{p-1}\right] = x \sum_{p\leqq x} \frac{1}{p-1} + 0\left(\frac{x}{Lx}\right)$$

und es gilt

$$\sum_{p\leqq x} \frac{1}{p-1} - \sum_{p\leqq x} \frac{1}{p} = \sum_{p\leqq x} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{2\leqq p<\infty} \frac{1}{p\,(p-1)} + 0\,(\tfrac{1}{x})$$

woraus Satz 1 folgt, da $\sum_{p\leqq x} 1/p = L_2 x + c_1 + 0\,(\frac{1}{Lx})$.

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir

Hilfssatz 1: Sei $k > 1$ $(k, l) = 1$ und $\pi(x, k, l)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqq x$ mit $p \equiv l \pmod k$. Es gilt bei passendem c_2

$$\pi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)\, Lx}\left(1 + 0\left(\frac{1}{Lx}\right)\right) \tag{6}$$

für $k \leqq \exp(c_2\, Lx/L_2x)$; ausgenommen sind dabei eventuell die k, welche durch ein festes $k_0 = k_0(x) \geqq 3$ teilbar sind.

Für den Beweis vgl. *Tatuzawa*, loc. cit.

Beweis von Satz 2: Sei

$$k = \prod_{p \leqq c_3\, Lx/L_2x,\ p \nmid q} p, \qquad 0 < c_3 < c_2 \tag{7}$$

wobei $q \mid k_0$ und $q \leqq c_3\, Lx/L_2x$ sei[3].

Es ist dann (für großes x)

$$k \leqq \exp\Big(\sum_{p \leqq c_3\, Lx/L_2x} Lp\Big) = \exp(\vartheta(c_3\, Lx/L_2x)) \tag{8}$$
$$< \exp(c_2\, Lx/L_2x)$$

wegen $\vartheta(x) \sim x$. Andererseits

$$k = \exp\Big(\sum_{p \leqq c_3\, Lx/L_2r} Lp - Lq\Big) > \exp(c_4\, Lx/L_2x), \qquad 0 < c_4 < c_3 \tag{9}$$

da $Lq = 0\ (L_2x)$; außerdem ist offenbar $k_0 \nmid k$, also Hilfssatz 1 anwendbar. Sei A die Anzahl der Lösungen von

$$m(p-1) \equiv 0 \pmod{k} \tag{10}$$

wenn m alle natürlichen Zahlen $\leqq x$ und p alle Primzahlen $\leqq x$ durchläuft.

Wir zählen zunächst für festes $d \mid k$ die Anzahl A_d der Lösungen von (10) mit der Bedingung

$$d \mid p-1,\ \frac{k}{d} \mid m,\ (m, d) = 1. \tag{11}$$

Nach Hilfssatz 1

$$\sum_{p \leqq x,\ d \mid p-1} 1 > c_5 \frac{x}{\varphi(d)\, Lx}, \qquad 0 < c_5 < 1. \tag{12}$$

Andererseits

$$\sum_{m \leqq x,\ \frac{k}{d} \mid m,\ (m, d)=1} 1 \geqq \left[\frac{x}{k}\right] \varphi(d), \tag{13}$$

also

$$A_d > c_5 \frac{x}{Lx}\left[\frac{x}{k}\right] = c_5 \frac{x^2}{k\, Lx} + 0\left(\frac{x}{Lx}\right) > c_6 \frac{x^2}{k\, Lx},\ 0 < c_6 < c_5, \tag{14}$$

---

[3] Wenn es kein q gibt, so sind die Überlegungen einfacher.

wegen $k < \exp(c_2 Lx/L_2 x)$. Und daraus

$$A = \sum_{d/k} A_d > c_6\, d(k)\, \frac{x^2}{k\, Lx} \tag{15}$$

wo $d(k)$ die Anzahl der Teiler von k bedeutet.

Nun haben wir

$$d(k) = 2^{\nu(k)}$$

wo für $\nu(k)$, die Anzahl der Primteiler in k, gilt

$$\nu(k) = \sum_{p \leqq c_3\, Lx/L_2 x\ p \nmid q} 1 \sim c_3 \frac{Lx}{L_2{}^2 x}. \tag{16}$$

Die Anzahl der Zahlen $\leqq x^2$, welche durch k teilbar sind, ist $[\frac{x}{k}]$. Für alle $m \leqq x$ und $p \leqq x$ mit (10) muß $m(p-1)$ eine solche Zahl sein. Also hat mindestens eine solche Zahl n mehr als

$$A/[x^2/k] > c_6 \frac{d(k)}{Lx} > \exp\left(c_7 \frac{Lx}{L_2{}^2 x}\right) > \exp\left(c_8 \frac{Ln}{L_2{}^2 n}\right)$$

Darstellungen $n = m(p-1)$.

Beweis von Satz 3: Wenn die Riemann'sche Vermutung über die Nullstellen der Dirichtlet'schen L-Reihen richtig ist, so gilt

$$\pi(x, k, l) > c_9 \frac{x}{\varphi(k)\, Lx} \text{ für } k \leqq x^{1/3-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0, \text{ fest}). \tag{17}$$

Dies folgt aus einem bekannten Resultat von *Titchmarsh* (vgl. Titchmarsh, Rendiconti Palermo 54 (1930) 414). Wenn man in dem eben durchgeführten Beweis von Satz 2 statt des oben verwendeten k setzt

$$k = \prod_{p \leqq (1/2-\varepsilon)\, Lx} p \tag{18}$$

so ergibt sich Satz 3.

Beweis von Satz 4: Zunächst bemerken wir, daß $\sum_{n \leqq x} \delta^2(n)$ die Lösungszahl S von

$$r(p-1) = s(q-1) \leqq x \tag{19}$$

ist, wo r, s natürliche Zahlen und p, q ungerade Primzahlen durchlaufen. Wir setzen $p-1 = a\,m$, $q-1 = b\,m$, $(a, b) = 1$, $m \geqq 2$. Aus (19) folgt wegen $(a, b) = 1$, daß $r = b\,u$, $s = a\,u$ und $u\,a\,b\,m \leqq x$ sein muß. Nun verwenden wir den folgenden

Hilfssatz 2: Sei $N > 0$, ganz, $(a, b) = 1$. Die Anzahl der m mit $1 \leqq m \leqq N$, für die beide Zahlen $a\,m+1$, $b\,m+1$ prim sind, ist

$$< c \frac{N}{L^2 N} g(a\,b \mid a-b \mid) \tag{20}$$

wobei allgemein $g(n) = \prod_{p/n} (1+1/p)$ gesetzt wurde. Der Beweis von (20) besteht in einer direkten Anwendung der Siebmethode von *Viggo Brun* oder der neuen Siebmethode von *Atle Selberg*.

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich, wegen $m \geqq 2$,

$$S < c \sum_{uab \leqq x/2,\,(a,b)=1} \frac{x}{u\,a\,b} L^{-2} \frac{x}{u\,a\,b} g(a\,b \mid a-b \mid) = c \sum_{u \leq x/2} \frac{x}{u} S\left(\frac{x}{u}\right) \tag{21}$$

wo

$$S(\xi) = \sum_{ab \leqq \xi/2} \frac{1}{a\,b} L^{-2} \frac{\xi}{a\,b} g(a\,b \mid a-b \mid) \tag{22}$$

Im folgenden zeigen wir

$$S(\xi) < c\,L\,\xi \tag{23}$$

Wenn das gezeigt ist, so folgt Satz 4 unmittelbar wegen

$$S < c \sum_{u \leqq x/2} \frac{1}{u} L \frac{x}{u} < c\,L^2 x.$$

Um (23) zu beweisen, schreiben wir

$$S(\xi) \leqq \sum_{1 \leqq a \leqq \sqrt{\xi/2}} \frac{1}{a} g(a) \sum_{a \leqq b \leqq \xi/2a} \frac{1}{b} g(b)\, g(b-a)\, L^{-2} \frac{\xi}{ab}$$

$$+ \sum_{1 \leqq b \leqq \sqrt{\xi/2}} \frac{1}{b} g(b) \sum_{b \leqq a \leqq \xi/2b} \frac{1}{a} g(a)\, g(a-b)\, L^{-2} \frac{\xi}{ab} = S_1 + S_2 \tag{24}$$

Es genügt, S_1 zu betrachten, da $S_2 = S_1$ ist. Wir teilen das Intervall $[a, \xi/2a]$ in Teilintervalle der Form $J_n = [\xi/2^{n+1}a, \xi/2^n a]$ $n = 1, 2, \ldots,$ $s-1 < c\,L\xi$. Das letzte Intervall soll $J_s = [a, \xi/2^s a]$ sein und ist im allgemeinen nicht ganz von der Form wie die $J_1, \ldots, J_{s-1}$.

Wir betrachten nun

$$\Sigma_n = \sum_{b \subset J_n} \frac{1}{b} g(b)\, g(b-a)\, L^{-2} \frac{\xi}{ab} \tag{25}$$

Für $b \subset J_n$ gilt $L^{-2} \frac{\xi}{ab} < c\,n^{-2}$; weiter hat man nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{b \subset J_n} \frac{1}{b}\, g(b)\, g(b-a) \leqq \frac{1}{y} \Big(\sum_{y < b \leqq 2y} g^2(b) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{y < b \leqq 2y} g^2(b-a) \Big)^{1/2} \tag{26}$$

wobei $y = \xi/2^{n+1}a$ für $n = 1,2,\ldots,s-1$; und $y = a$ für $n = s$. Nun gilt, wenn p über eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von Primzahlen läuft, stets $\Pi(1+1/p)^2 < c\,\Pi(1+2/p)$, wo c von der Primzahlmenge unabhängig ist. Wenn wir noch mit $v(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von d bezeichnen, so gilt also

$$\sum_{y < b \leqq 2y} g^2(b) < c \sum_{y < b \leqq 2y,\ p \mid b} \Pi\,(1+2/p) \leqq c \sum_{d \leqq 2y} \frac{1}{d}\, 2^{v(d)} \sum_{y < kd \leqq 2y} 1 < c \sum \frac{1}{d}\, 2^{v(d)} \Big(\frac{y}{d}+1\Big)$$
$$< c\,(y+L^2 y), \tag{27}$$

(wo oben nur über die quadratfreien d zu summieren ist), wegen

$$\sum_{d < \infty} \frac{1}{d^2}\, 2^{v(d)} < \infty$$

und

$$\sum_{d \leqq 2y} \frac{1}{d}\, 2^{v(d)} < c \prod_{p \leqq 2y} \Big(1+\frac{2}{p}\Big) < c\, L^2(2y).$$

Weiter gilt wegen $a \leqq y$

$$\sum_{y < b \leqq 2y} g^2(b-a) < c \sum_{d \leqq 2y-a} \frac{1}{d}\, 2^{v(d)} \sum_{y < a+kd \leqq 2y,\ d \leqq 2y-a} 1 < c \sum \frac{1}{d}\, 2^{v(d)} \Big(\frac{y}{d}+1\Big) < c\,(y+L^2\, y) \tag{28}$$

und aus (25) bis (28) folgt

$$\Sigma_n < c\, n^{-2}.$$

Also ergibt sich

$$\sum_{r=1}^{s} \Sigma_n = \sum_{a < b \leqq \xi/2a} \frac{1}{b}\, g(b)\, g(b-a)\, L^{-2}\, \frac{\xi}{ab} = 0\,(1)$$

Dies, in (24) eingesetzt, gibt

$$S(\xi) < c \sum_{a \leqq \xi} \frac{g(a)}{a} \leqq c \sum_{d \leqq \xi} \frac{1}{d} \sum_{kd \leqq \xi} \frac{1}{kd} < c\, L\, \xi,$$

weil $g(a) \leqq \sum_{d \mid a} d^{-1}$. Damit ist (23) und auch Satz 4 bewiesen. Aus Satz 4 folgt noch, daß bei passendem c

$$d(n) > c \sqrt{\log n}\, \delta(n)$$

für unendlich viele gerade n.

Ebenso wie beim Beweis von Satz 4 kann man zeigen, daß die Anzahl der Primzahlpaare p, q, für welche das kleinste gemeinsame Vielfache

von $p-1$ und $q-1 \leqq x$ ist, gleich $0\,(x\log x)$ ist, woraus wieder Satz 4 folgt.

Zusatz bei der Korrektur: Herr Prof. *Erdös*, dem ich meine Resultate mitgeteilt hatte, übersandte mir freundlicherweise einen Beweis dafür, daß die letztgenannte Anzahl sogar ein $0\,(x \log\log x)$ ist, was bei Satz 4 eine Verbesserung auf $0\,(x \log\log^2 x)$ ermöglicht. Satz 2, 3 erklärt übrigens das Auftreten von abnorm großen Lösungszahlen bei der Darstellung von n als kleinstes gem. Vielfaches von Zahlen $p-1$ (vgl. die Tabelle in *Nöbauer* loc. cit.). Denn aus einer Formel von *Nöbauer*, loc. cit. folgt mit Satz 2, daß diese Anzahl $>$ exp (exp $cLn/L_2\, n$) ist, für unendlich viele n.

Über die Lösungszahl eines Systems von Gleichungen in Primzahlen.

Von

K. Prachar Wien.

(Eingelangt am 19. Oktober 1954.)

1.

Sei $f(n)$ die Anzahl der Lösungen von

$$p_1 + p_2 = n \tag{1}$$

wo n eine natürliche Zahl ist und der Buchstabe p ungerade Primzahlen bezeichnet. Nach Schnirelman gilt

$$f(n) < c \frac{n}{\log^2 n} g(n)$$

wo $g(n) = \prod_{p/n} (1+1/p)$; mit c werden, wie üblich, positive Konstanten bezeichnet, die nicht immer den gleichen Wert haben müssen. Bekanntlich ist stets $g(n) < c \operatorname{loglog} n$. In einer früheren Arbeit habe ich gezeigt, daß für unendlich viele n gilt

$$f(n) > c \frac{n}{\log^2 n} \operatorname{loglog} n \tag{2}$$

(*K. Prachar*, Journ. Lond. Math. Soc. **29** (1954) 347). Dort habe ich auch eine untere Schranke der Form $\exp(c\sqrt{\log x})$ für die Anzahl der $n \leqq x$ gewonnen, für die (2) gilt. *Prof. Erdös* machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß sich diese untere Schranke noch wesentlich verbessern läßt.

In dieser Arbeit untersuche ich in ähnlicher Weise die Lösungszahl des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= n \\ p_2 + p_3 &= m \end{aligned} \qquad m \neq n \tag{3}$$

(m, n-natürliche Zahlen, p-Primzahlen) .Außerdem gebe ich auch eine

obere Abschätzung für die Anzahl der m, n für die (3) viele Lösungen hat. Genauer zeige ich

Satz 1: Sei $n < m$. Für die Lösungszahl $F(n, m)$ von (3) gilt

$$F(n, m) < c \frac{n}{\log^3 n} G(n, m) \tag{4}$$

wobei

$$G(n, m) = \prod_{p|n} \left(1+\frac{1}{p}\right) \prod_{p|m,\, p<n} \left(1+\frac{1}{p}\right) \prod_{p|m-n,\, p\nmid n,\, p<n} \left(1+\frac{1}{p}\right) \tag{4a}$$

Satz 2: Für unendlich viele Systeme n, m $(n < m)$ gilt

$$F(n, m) > c \frac{m}{\log^3 m} (\log\log m)^2 \tag{5}$$

Satz 3: Sei $0 < \varepsilon < 1$. $A_\varepsilon = A_\varepsilon(x, \bar{c})$ sei die Anzahl der Paare n, m mit $n \leqq x$, $m \leqq x$, $m \neq n$ für die

$$F(n, m) > \bar{c}\, \varepsilon^2 \frac{x}{\log^3 x} (\log\log x)^2 \tag{5a}$$

Bei passend gewähltem festem $\bar{c}$ ist

$$A_\varepsilon > c\, \varepsilon^2 x^2 \exp(-c \log^{2\varepsilon} x) \tag{6}$$

Satz 4: Für ein passend gewähltes $c = c(\bar{c})$ ist

$$A_\varepsilon < x^2 \exp(-\log^{c\varepsilon} x) \qquad x > x_1(\varepsilon), \tag{7}$$

c von ε unabhängig.

Der Beweis von Satz 1 kann durch direkte Anwendung der Brunschen Siebmethode erbracht werden und wird hier nicht ausgeführt. Ich möchte noch an dieser Stelle Herrn *Prof. Erdös* danken, für den Hinweis auf die Methode beim Beweis von Satz 3 und für die Erlaubnis, sie hier wiederzugeben.

2.

Wir setzen zur Abkürzung $\log x = Lx$, $\log\log x = L_2 x$, usw. Wir benötigen noch den folgenden

Hilfssatz: Sei $\pi(x, k, l)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqq x$ mit $p \equiv l \pmod k$ $(k, l) = 1$, $k \geqq 2$. Dann gilt für alle $k < \exp(c_1 Lx/L_2 x)$

$$\pi(x, k, l) > c \frac{x}{\varphi(k)\, Lx} \tag{8}$$

ausgenommen sind eventuell diejenigen k, welche durch ein festes $k_0 = k_0(x) > 3$ teilbar sind (man kann für k_0 auch eine untere Schranke

angeben, die für $x \to \infty$ gegen ∞ geht, doch brauchen wir dies nicht).

Der Beweis des Hilfssatzes ergibt sich aus den Resultaten von *Rodosski*, die etwas allgemeiner nachher auch von *Tatuzawa* bewiesen wurden (vgl. *Tatuzawa*, Jap. Journ. of Math **21** (1951) 93).

Beweis von Satz 2: Sei $c_2 < c_1$ und q eventuell die kleinste in k_0 aufgehende ungerade Primzahl. Wir setzen

$$k = \prod_{p \leqq c_2 Lx/L_2x,\ p \neq q} p \tag{9}$$

Dann ist für genügend große x

$$k \leqq \exp(\vartheta(c_2 Lx/L_2x)) < \exp(c_1 Lx/L_2x) \tag{10}$$

und $k_0 \nmid k$. Nun zeigen wir, daß das System von Kongruenzen

$$p_1 + p_2 \equiv 0,\ p_2 + p_3 \equiv 0 \pmod{k} \tag{11}$$

viele Lösungen mit $0 < p_1, p_2, p_3 \leqq x/2$ hat.

Zu einem festen $p_2 \leqq x/2$ gibt es nach dem Hilfssatz mehr als $c\, x/\varphi(k)Lx$ Primzahlen $p_1 \leqq x/2$ mit $p_1 \equiv -p_2 \pmod{k}$, falls nicht gerade $p_2 \mid k$. Die Anzahl der p_2 mit $p_2 \mid k$ ist aber offenbar $o(x/Lx)$.

Ebenso gibt es bei festem p_2 ($p_2 \leqq x/2$, $p_2 \nmid k$) mehr als $c\, x/\varphi(k)\, Lx$ Primzahlen $p_3 \leqq x/2$ mit $p_2 + p_3 \equiv 0 \pmod{k}$. Die Anzahl solcher p_2 ist $> c\, x/Lx$. Daher gibt es jedenfalls mehr als

$$c \frac{x^3}{\varphi^2(k)\, L^3\, x} \tag{12}$$

Tripel p_1, p_2, p_3 von Primzahlen $\leqq x/2$ für die (11) gilt. Für jedes solche Tripel ist $(p_1 + p_2, p_2 + p_3)$ ein Paar von Zahlen, von denen jede durch k teilbar und $\leqq x$ ist. Die Anzahl der p_1, p_2, p_3, für die $p_1 + p_2 = p_2 + p_3$ gilt, ist nach *Schnirelmann*

$$0\left(\frac{x^2}{L^2\, x}\ L_2\ x\right) = o\left(\frac{x^3}{\varphi^2(k)\, L^3\, x}\right)$$

wegen $k^2 < \exp 2\, c_1\, Lx/L_2x$. Die Gesamtzahl der Zahlenpaare m, n mit $m \leqq x$, $n \leqq x$, $m \equiv n \equiv 0 \pmod{k}$, $m \neq n$ ist $\leqq (x/k)^2$. Mindestens ein solches Zahlenpaar wird also auf mehr als

$$c \frac{x^3}{\varphi^2(k) L^3 x} \Big/ \frac{x^2}{k^2} = c \frac{x}{L^3 x} \left(\frac{k}{\varphi(k)}\right)^2 \tag{13}$$

verschiedene Arten in der Form (3) dargestellt. Nun ist aber

$$\frac{k}{\varphi(k)} = \prod_{p \leqq \exp(c_2 Lx/L_2x)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > c\, L_2\, x$$

wegen $\prod_{p \leqq \xi} (1-p^{-1})^{-1} \sim c\, L\, \xi$. Daher folgt für das oben erhaltene Zahlenpaar (n, m) wenn noch $n < m$ vorausgesetzt wird (was offenbar keine Beschränkung ist)

$$F(n, m) > c \frac{x}{L^3 x} L_2^2\, x \geqq c \frac{m}{L^3\, m} L_2^2\, m \tag{14}$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beweis von Satz 3: Wir bemerken zunächst, daß für $n \leqq x$, $m \leqq x$ $n < m$ stets gilt

$$G(n, m) < c\, L_2^2\, x \tag{15}$$

Es ist nämlich

$$G(n, m) \leqq \prod_{p/n} (1+\frac{1}{p}) \prod_{p/m\,(m-n)} (1+\frac{1}{p}) \tag{16}$$

Wegen $m \mid m - n \mid \leqq x^2$ ist das letzte Produkt $< c\, L_2(x^2) < cL_2 x$ und das erste Produkt ist auch $< c\, L_2 x$, woraus (15) folgt. Statt des k in (9) setzen wir

$$k = \prod_{p \leqq (Lx)^{\varepsilon},\ p \neq q} p \tag{17}$$

und erhalten wie früher unter (12)

$$\sum_{n, m \leqq x,\ n \equiv m \equiv 0 \pmod k,\ n \neq m} F(n, m) > c \frac{x^3}{\varphi^2(k) L^3 x} > c\ \varepsilon^2 \frac{x^3}{k^2\, L^3 x} L_2^2\, x \tag{18}$$

weil $k/\varphi(k) \sim \varepsilon\, c\, L_2 x$. Weiter ist offenbar

$$\sum_{\substack{n, m \leqq x,\ n \equiv m \equiv 0 \pmod k,\ n \neq m \\ F(n, m) < c_3\, \varepsilon^2\, x\, L_2^2 x / L^3 x}} F(n, m) < (\frac{x}{k})^2\, c_3\, \varepsilon^2\, \frac{x}{L^3\, x} L_2^2\, x \tag{19}$$

also bei genügend kleinem c_3 nach (18), (19)

$$\sum_{\substack{n, m \leqq x,\ n \equiv m \equiv 0 \pmod k \\ F(n, m) > c_3\, \varepsilon^2\, x\, L_2^2 x / L^3 x}} F(n, m) > c_4\, \varepsilon^2\, \frac{x^3}{k^2 L^3 x} L_2^2 x \tag{20}$$

Nach (4), (15) ist immer $F(n, m) < c_5\, x L_2^2 x / L^3 x$[1] und daher ergibt sich aus (20), daß es mehr als

$$c_4\, \varepsilon^2\, \frac{x^3}{k^2\, L^3 x} L_2^2\, x / c_5 \frac{x}{L^3 x} L_2^2\, x = c_6\, \varepsilon^2\, \frac{x^2}{k^2} > c_6\, \varepsilon^2\, x^2 \exp(-c\, L^{2\varepsilon} x)$$

Zahlenpaare $n, m \leqq x, m \neq n$ gibt, für welche gilt: $F(n, m) > c_3\, \varepsilon^2\, x L_2^2 x / L^3 x$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

---

[1] Dies gilt offenbar auch für $m < n \leqq x$.

Beweis von Satz 4: Wir betrachten nur den Fall $\bar{c} = 1$, da eine andere Wahl von $\bar{c}$ nur die Konstanten in dem folgenden Beweis ändert. Aus (4) und

$$F(n, m) > \varepsilon^2 \frac{x}{L^3 x} L_2{}^2 x \tag{21}$$

folgt

$$(\varepsilon L_2 x)^2 < c \prod_{p/n} (1+\frac{1}{p}) \prod_{p/m} (1+\frac{1}{p}) \prod_{p/m-n,\ p \nmid m} (1+\frac{1}{p}) \tag{22}$$

Es muß also bei passendem c_7 entweder

$$\prod_{p/n} (1+\frac{1}{p}) > c_7 \varepsilon L_2 x \tag{23}$$

oder

$$\prod_{p/m} (1+\frac{1}{p}) \prod_{p/m-n,\ p \nmid m} (1+\frac{1}{p}) > c_7 \varepsilon L_2 x \tag{24}$$

sein.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß (24) gilt, da der erste Fall genau so und noch einfacher behandelt werden kann. Die Zahlen m und $\prod_{p/m-n,\ p \nmid m} p$ sind teilerfremd und beide $\leqq x$. Sei s die Gesamtanzahl der in beiden vorkommenden verschiedenen Primfaktoren. Aus (24) folgt

$$\prod_{p \leqq p_s} (1+\frac{1}{p}) > c_7 \varepsilon L_2 x, \tag{25}$$

p_s—s -te Primzahl in der natürlichen Reihenfolge und wegen

$$\prod_{p \leqq \xi} (1+\frac{1}{p}) < c L \xi$$

auch

$$c L p_s > c_7 \varepsilon L_2 x, \tag{26}$$

$$s > c_8 \frac{(Lx)^{c\varepsilon}}{\varepsilon L_2 x}$$

Es müssen daher entweder in m oder in m—n mehr als $\frac{1}{2} c_8 (Lx)^{c\varepsilon} / \varepsilon L_2 x$ Primzahlen enthalten sein. Nehmen wir den zweiten Fall an; der erste erledigt sich genau so. Dann hat $|m - n|$ mindestens

$$2^{\frac{1}{2} c_8 (Lx)^{c\varepsilon} / \varepsilon L_2 x} \tag{27}$$

Teiler. Wenn $d(a)$ die Anzahl der (positiven) Teiler von a bedeutet, so gilt

$$\sum_{a \leqq x} d(a) \sim xLx \tag{28}$$

und daher ist die Anzahl der $a \leqq x$, für die $|m - n| = a$ ist,

$$< c\, x\, Lx\, 2^{-c_9 (Lx)^{c\varepsilon}/\varepsilon\, L_2 x} \tag{29}$$

Zu jedem festen a gibt es aber höchstens $2x$ Wertepaare $n, m \leqq x$ mit $|m - n| = a$. Also erkennt man schließlich, daß die Anzahl der Paare $n, m \leqq x, m \neq n$ für die (21) gilt

$$< c\, x^2\, Lx \exp(-c(L\, x)^{c\varepsilon}/\varepsilon\, L_2 x)$$

$$< x^2 \exp(-(Lx)^{c_{10}\varepsilon}),\ x > x_1(\varepsilon).$$

Bei passendem c_{10}, womit Satz 4 bewiesen ist. Satz 4 lehrt, daß Satz 3 „im wesentlichen" nicht mehr verbessert werden kann, da in beiden Sätzen ein Faktor der Form $\exp(-(Lx)^{c\varepsilon})$ auftritt.

Über den Typus eines Zerlegungsringes.

Von

Georg Kantz, Graz.

(Eingelangt am 19. November 1954.)

§ 1. Problemstellung.

H. Hasse[1] hat ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür aufgestellt, daß in einem Integritätsbereich J jedes Ideal ein Hauptideal ist. Dieses Kriterium ist zugleich hinreichend für die Gültigkeit des Satzes von der eindeutigen Zerlegbarkeit jedes von Null und Einheiten verschiedenen Elementes von J in Primelemente (kurz als *Zerlegungssatz* bezeichnet). Da es aber Ringe gibt, in denen der Zerlegungssatz gilt, die aber keineswegs Hauptidealringe sind[2], so ist es klar, daß das Hassesche Kriterium für die Gültigkeit des Zerlegungssatzes nicht zugleich notwendig sein kann.

In dieser Mitteilung soll die Frage nach dem Typus eines Integritätsbereiches, in welchem der Zerlegungssatz gilt, beantwortet werden. Der zur Behandlung dieser Frage grundlegende Satz, daß ein Zerlegungsring, der eine algebraische Erweiterung eines Hauptidealringes ist, ein Hauptidealring ist, wird in § 3 bewiesen. Aus der bekannten Tatsache, daß eine Polynomringerweiterung eines Zerlegungsringes wieder ein solcher ist, folgt in § 4 mit Berücksichtigung des Satzes von § 3 eine Antwort auf das gestellte Problem. Schält man aus dem nun bekannten Typus eines Zerlegungsringes, der nicht schon ein Hauptidealring ist, die charakteristischen Merkmale heraus (§ 5), so gelangt man zu einem notwendigen und zugleich hinreichenden Kriterium für einen Zerlegungsring. Letzteres hat der Verfasser bereits in einer demnächst im Arch. d.

---

[1] *H. Hasse* „Über die Zerlegung in Primelemente oder Primhauptideale in Integritätsbereichen". J. f. Math. **159** (1928), S. 3—12.

[2] Im Integritätsbereich $\Gamma(x)$ der Polynome in einer Unbestimmten x über dem Ring der ganzen Zahlen Γ ist das Ideal (p, x), wo p eine Primzahl ist, kein Hauptideal. Bekanntlich gilt aber in $\Gamma(x)$ der Zerlegungssatz.

Math. erscheinenden Arbeit in einer anderen Art, die sich mehr der in der Fußnote[1] zitierten Hasse'schen Arbeit anschließt, erschöpfend behandelt.

§ 2. Bezeichnungsfestsetzungen und Definitionen.

1. J bzw. $\bar{J}$ bezeichnen Integritätsbereiche mit Einselement. Griechische Buchstaben (mit Ausnahme des Funktionszeichens χ), eventuell überstrichen, bezeichnen durchweg Elemente des zugrundegelegten Integritätsbereiches, speziell ε das Einselement. Mit χ ist immer der später zu definierende Betrag eines Elementes aus J gemeint.
2. Erklärung einiger in dieser Arbeit häufig gebrauchter Begriffe.

   Def. 1. a) α, β sind *teilerfrei*, wenn sie außer Einheiten keine gemeinsamen Teiler besitzen.

   b) β ist *prim* zu α, wenn aus $\alpha \mid \beta\gamma$ folgt $\alpha \mid \gamma$.

   c) α, β sind *teilerfremd*, wenn $(\alpha, \beta) = (\varepsilon)$ ist, d. h. wenn es zwei Elemente μ, ν gibt, so daß $\mu\alpha + \nu\beta = \varepsilon$ ist.

   Def. 2. Ein von Null und Einheiten verschiedenes Element π ist *Primelement*, wenn aus $\pi \mid \alpha\beta$ und $\pi \nmid \alpha$ folgt, daß $\pi \mid \beta$ ist.

   Def. 3. Ein von 0 und Einheiten verschiedenes Element soll *unzerlegbar* heißen, wenn es außer Einheiten und Assoziierten keine Teiler, m. a. W., wenn es keine echten Teiler hat.

   Def. 4. Ein Ring, in dem jedes Ideal Hauptideal ist, heißt *Hauptidealring* (kurz *H-Ring*).

   Def. 5. Ein Ring, in dem der Zerlegungssatz für jedes von 0 und Einheiten verschiedene Element gilt, soll als *Zerlegungsring* (*Z-Ring*) bezeichnet werden.

Ein H-Ring ist stets ein Z-Ring, aber wie das Beispiel aus Fußnote 2 zeigt, nicht notwendig umgekehrt.

§ 3. Z-Ringe, die algebraische Erweiterungen von H-Ringen sind.

Satz: *Jeder Z-Ring, der eine algebraische Erweiterung eines H-Ringes ist, ist ein H-Ring.*

Beweis: Sei J ein Hauptidealring und $\bar{J}$ der Bereich aller ganzen Elemente einer algebraischen Erweiterung des zu J gehörigen Quotientenkörpers. Im Integritätsbereich $\bar{J}$ soll der Zerlegungssatz gelten. Seien ferner π_j Primelemente aus J und $\bar{\pi}_j$ solche aus $\bar{J}$. Dann ist $\bar{\pi}_i$ entweder mit einem Primelement aus J assoziiert oder echter Teiler eines Primelementes aus J.

Zunächst gilt für zwei nicht assoziierte Primelemente π_i, π_k aus J

$$(\pi_i, \pi_k) = (\varepsilon), \tag{1}$$

weil J der Voraussetzung nach ein H-Ring ist.

Zwei zu einander nicht assoziierte Primelemente $\bar{\pi}_i$, $\bar{\pi}_k$ aus $\bar{J}$ sind entweder 1. in dieser Reihe Teiler von zwei zueinander nicht assoziierten Primelementen π_i und π_k aus J oder 2. Teiler desselben Primelementes π aus J.

ad 1. Wegen (1) gibt es zwei Elemente μ und ν aus J, so daß

$$\mu\pi_i + \nu\pi_k = \varepsilon \tag{2}$$

ist. Setzt man hierin, wie vorausgesetzt,

$$\pi_i = \bar{\pi}_i \bar{\alpha}_i \text{ und } \pi_k = \pi_k \bar{\alpha}_k,$$

so erhält man

$$(\mu \bar{\alpha}_i)\pi_i + (\nu \bar{\alpha}_k)\bar{\pi}_k = \varepsilon \tag{3}$$

und es gilt daher

$$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_k) = (\varepsilon). \tag{4}$$

ad 2. Hier sind die zueinander nicht assoziierten Primelemente π_i und $\bar{\pi}_k$ aus $\bar{J}$ Teiler desselben Primelementes π aus J, dessen eindeutig vorausgesetzte Primelementzerlegung in $\bar{J}$ etwa

$$\pi = \bar{\pi}_1 \ldots \bar{\pi}_i \ldots \bar{\pi}_k \ldots \bar{\pi}_r \tag{5}$$

gegeben sei, wobei unter den $\bar{\pi}_j$ mindestens zwei (nämlich $\bar{\pi}_i$ und $\bar{\pi}_k$) zueinander nicht assoziiert sind. Alle Elemente des Ideals $(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_k)$ haben die Gestalt

$$\bar{\lambda}\bar{\pi}_i + \bar{\mu}\bar{\pi}_k = \bar{\delta} \tag{6}$$

und man kann $\bar{\lambda}$ und μ so wählen, daß $\bar{\delta}$ durch keinen der auf der rechten Seite von (5) auftretenden Primfaktoren $\bar{\pi}_j$ von π teilbar ist. Dazu braucht man z. B. nur $\bar{\lambda} = \varepsilon$ und für $\bar{\mu}$ das Produkt aller weder zu $\bar{\pi}_i$ noch zu $\bar{\pi}_k$ assoziierten Primfaktoren von π zu wählen. (Falls keine solchen vorhanden, auch $\bar{\mu} = \varepsilon$.) Dann enthält $\bar{\delta}$ höchstens nur solche Primelemente, die nicht in π aufgehen, also zu jedem $\bar{\pi}_j$ nach 1. (4) teilerfremd sind. Dann ist aber $\bar{\delta}$ als Produkt von zu π teilerfremden Elementen zu π teilerfremd und es gilt

$$\bar{\mu}^* \pi + \bar{\nu}^* \bar{\delta} = \varepsilon \tag{7}$$

für geeignete $\bar{\mu}^*$, ν^* aus $\bar{J}$. Bei Beachtung von (5) und (6) folgt aus (7)

$$\bar{\mu}^* \bar{\pi}_1 \ldots \bar{\pi}_i \ldots \bar{\pi}_k \ldots \bar{\pi}_r + \bar{\nu}^*(\bar{\lambda}\bar{\pi}_i + \bar{\mu}\bar{\pi}_k) = \varepsilon,$$

woraus sich

$$(\bar{\mu}^* \bar{\pi} \ldots \bar{\pi}_{i-1} \bar{\pi}_{i+1} \ldots \bar{\pi} \ldots \bar{\pi}_r + \bar{\nu}^* \bar{\lambda}) \bar{\pi}_i + (\bar{\nu}^* \bar{\mu}) \bar{\pi}_k = \varepsilon,$$

d. h.

$$(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_k) = (\varepsilon) \tag{8}$$

ableitet.

In beiden Fällen ergibt sich für zwei nicht assoziierte Primelemente aus $\bar{J}$ ihre Teilerfremdheit (Def. 1c).

Jedes *teilerfreie* Elementepaar (Def. 1a) aus $\bar{J}$ ist somit gleichzeitig *teilerfremd*. Der Z-Ring $\bar{J}$ ist daher ein H-Ring, wie es der Satz behauptet.

§ 4. Der Typus eines Z-Ringes.

Der Eindeutigkeitsbeweis für die Darstellung jedes Elementes eines Integritätsbereiches J als Potenzprodukt von Primelementen gelingt bekanntlich dann und nur dann, wenn jedes nach Def. 3 unzerlegbare Element aus J Primelement ist (Def. 2). Es gilt zwar stets die Aussage „Jedes Primelement ist unzerlegbar", aber *nicht* in *jedem* Integritätbereich ihre Umkehrung. Die Gültigkeit der letzteren ist somit für Z-Ringe charakteristisch. Man kann aber Z-Ringe auch noch anders charakterisieren. Bezeichnet man hiezu einen Integritätsbereich, in welchem zu je zwei Elementen α, β der sogenannte „größte gemeinsame Teiler" (kurz g. g. T.), — in welchem jeder gemeinsame Teiler von α und β enthalten ist und der dann bis auf zu ihm Assoziierte eindeutig bestimmt ist —, existiert, als *vollkommen*, so gilt bekanntlich der Satz, daß jedes in einem vollkommenen Integritätsbereich unzerlegbare Element auch Primelement und somit *jeder vollkommene Integritätsbereich ein Z-Ring* ist und umgekehrt. Diese Tatsache benützt man beim Beweis des Satzes, daß mit J auch $J[x]$ ein Zerlegungsring ist[3], indem mit Verwendung eines entsprechend verallgemeinerten Euklidischen Divisionsverfahrens zu zwei Elementen aus $J[x]$ der g. g. T. gefunden werden kann. Da ferner jeder Primintegritätsbereich Hauptidealring[4], also a fortiori ein Z-Ring ist, ist jede einfache oder mehrfache Polynomerweiterung eines Hauptidealringes ein Z-Ring. Nach dem in § 3 Bewiesenen ist ein Z-Ring, der nicht auch H-Ring ist, *nur* durch transzendente Erweiterung daraus hervorgegangen. Also gilt der

---

[3] $J[x]$ ist der Polynomring in der Unbestimmten x über J.

[4] Der Primintegritätsbereich ist nämlich im Falle einer Primzahlcharakteristik ein Körper und im Falle der Charakteristik 0 zum Hauptidealring Γ der ganzen rationalen Zahlen isomorph.

Satz: Der Typus eines Z-Ringes ist ein Hauptidealring oder eine ein- bzw. mehrfach transzendente Ringerweiterung eines solchen.

§ 5. Notwendiges und hinreichendes Kriterium für Z-Ringe.

Sei J ein vollkommener Integritätsbereich und K der dazugehörige Quotientenkörper. $J[x]$ ist dann ein Z-Ring, der kein H-Ring ist. Die Elemente aus $J[x]$ seien mit kleinen griechischen Lettern, die aus $K[x]$ durch Überstreichen solcher Buchstaben gekennzeichnet. Dann ist der g. g. T. $\bar{\gamma}$ zweier (bereits in $J[x]$ gelegener) Elemente α, β aus $K[x]$ als Linearform der letzteren darstellbar:

$$\bar{\gamma} = \bar{\mu}\,\alpha + \bar{\nu}\,\beta \tag{9}$$

Ist dann φ das in J gelegene kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von $\bar{\mu}$ und $\bar{\nu}$, so erhält man aus (9)

$$\varphi\,\bar{\gamma} = \varphi\,\bar{\mu}\,\alpha + \varphi\,\bar{\nu}\,\beta \tag{10}$$

Ist nun γ der im Z-Ring $J[x]$ existierende g. g. T. von α und β, und setzt man

$$\varphi\bar{\mu} = \mu,\ \varphi\bar{\nu} = \nu \text{ und } \varphi\bar{\gamma} = \varrho\gamma \tag{11}$$

so sind μ, ν, ϱ Elemente aus $J[x]$ und (10) geht über in

$$\mu\alpha + \nu\beta = \varrho\gamma. \tag{12}$$

Hier können μ und ν schon so gewählt sein, daß ϱ als der zu α *prime* (in $J[x]$ gelegene) Teiler von $\varphi\bar{\gamma}$ angesehen werden kann; denn wegen $\alpha = \alpha_1\gamma$, $\beta = \beta_1\gamma$ folgt aus (12)

$$\mu\alpha_1 + \nu\beta_1 = \varrho \tag{13}$$

und umgekehrt, und ähnlich wie in § 3,2. lassen sich bei entsprechender Aufteilung der Faktoren von γ die Elemente μ und ν so bestimmen, daß ϱ *prim* zu α ausfällt.

γ enthält als g. g. T. von α und β jeden gemeinsamen Primfaktor π_j von α und β, wobei die Anzahl der gleichen oder verschiedenen Primfaktoren der Zerlegung von γ höchstens gleich ist der kleineren Anzahl der bei den entsprechenden Zerlegungen von α und β auftretenden Primfaktoren. (Dabei tritt die Gleichheit nur auf, wenn $\alpha \mid \beta$ bzw. $\beta \mid \alpha$.) Die den größten gemeinsamen Teiler γ charakterisierenden Eigenschaften sind somit folgende:

Es existieren in dem Falle, daß keines der beiden Elemente α und β durch das andere teilbar ist (die Fälle $\alpha \mid \beta$ bzw. $\beta \mid \alpha$ sind uninteressant,

da hier schon α bzw. β g. g. T. ist), zwei Elemente μ und ν derart, daß die Relation (12) mit zu α primen ϱ erfüllt ist, wobei γ möglichst wenig Primfaktoren besitzt und diese in kleinerer Anzahl als in jedem der beiden Elemente α, β auftreten.

Diese γ charakterisierenden Merkmale werden mit Hilfe einer ad hoc für alle Elemente des vorgelegten Ringes erklärten Betragsfunktion „χ" beschrieben und man gelangt so zu folgendem

Satz: Damit der Zerlegungssatz in einem vorgelegten Integritätsbereich J mit Einselement gilt, ist notwendig und hinreichend, daß eine ganz rationalwertige Funktion χ der Elemente von J erklärbar ist, der die folgenden Eigenschaften zukommen:

1. $\chi(\alpha) > 0$ *für* $\alpha \neq 0$; $\chi(0) = 0$
2. $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\,\chi(\beta)$
3. $\chi(\eta) = 1$ *dann und nur dann, wenn* η *Einheit ist.*
4. *Zu je zwei Elementen* α, β, *von denen keines durch das andere teilbar ist, existieren Elemente* μ, ν *und ein zu* α *primes* ϱ *derart, daß die Relationen*

$$\mu\alpha + \nu\beta = \varrho\gamma \tag{a}$$

$$0 < \chi(\gamma) < \text{Min}\,[\chi(\alpha), \chi(\beta)] \tag{b}$$

gleichzeitig bestehen.

Nach 2. und 3. nimmt die Betragsfunktion χ für assoziierte Elemente, die in Teilbarkeitsaussagen dieselbe Rolle spielen, denselben Wert an. Wegen 1. und 3. gilt für Primelemente π $\chi(\pi) = k_\pi$, wobei k_π eine *positive* ganze rationale Zahl, die *größer als 1 ist*, bedeutet. Man kann ferner in 4. (a) die Elemente μ und ν derart bestimmen, daß γ möglichst wenig Primfaktoren enthält, also $\chi(\gamma)$ einen Minimalwert annimmt. Mit 4. (b) zusammen hat dann γ in einem Z-Ring die oben erwähnten Eigenschaften des g. g. T. von α und β.

Liegt also ein Z-Ring vor, der nicht H-Ring zu sein braucht, so läßt sich eine Betragsfunktion für die Elemente dieses Ringes mit den Eigenschaften 1., 2., 3., 4. angeben. Es erweist sich also die Existenz einer Betragsfunktion mit den Eigenschaften 1., 2., 3., 4. als *notwendiges* Kriterium für einen Z-Ring.

Um nun zu zeigen, daß dieses Kriterium für Z-Ringe auch *hinreichend* ist, sei J ein Integritätsbereich, in welchem eine Betragsfunktion χ mit den obigen Eigenschaften 1., 2., 3., 4 erklärt werden kann. Weiter seien in 4. (a) μ und ν schon so gewählt, daß γ die oben erwähnte Minimaleigenschaft hat. Man hat zu zeigen, daß dann γ g. g. T. von α und β ist. Zunächst erkennt man, daß jeder gemeinsame Teiler von α und β, der

sich als solcher in 4. (a) auf der linken Seite herausheben läßt, weil „ϱ prim zu α", ein Teiler von γ ist. Man braucht nur noch zu zeigen, daß γ sowohl A) Teiler von α als auch B) Teiler von β ist.

ad A). Wäre $\gamma \nmid \alpha$, so existierte wegen $\alpha \nmid \gamma$ (dies folgt aus 4. (b) wegen 1. und 2.) nach 4. ein Elementepaar μ_1, ν_1 und ein *zu* α *primes* ϱ_1 derart, daß

$$\mu_1 \alpha + \nu_1 \gamma = \varrho_1 \gamma_1 \tag{a'}$$

mit

$$0 < \chi(\gamma_1) < \chi(\gamma) \tag{b'}$$

gilt.

Eliminition von γ aus den Beziehungen (a) und (a') würde

$$(\mu\, \nu_1 + \mu_1 \varrho)\alpha + \nu\, \nu_1\, \beta = \varrho\, \varrho_1\, \gamma_1 \tag{a''}$$

mit

$$\varrho\, \varrho_1 \textit{ prim} \text{ zu } \alpha$$

und

$$0 < \chi(\gamma_1) < \chi(\gamma) \tag{b''}$$

ergeben im Widerspruch mit der Minimaleigenschaft von γ.

Bemerkung: Wegen der hier bewiesenen Teilbarkeitsbeziehung „$\gamma \mid \alpha$" kann die in 4. (a) für ϱ aufgestellte Eigenschaft „prim zu α zu sein" durch die „prim zu γ zu sein" ersetzt werden. Man beachte aber, daß die Teilbarkeitsbeziehung $\gamma \mid \alpha$ die Minimaleigenschaft von γ erheischte.

ad B). Wäre $\gamma \nmid \beta$, so existierte nach ähnlicher Überlegung wie unter A) ein Elementepaar μ_2, ν_2 und ein *zu* γ *primes* ϱ_2 derart, daß

$$\mu_2 \gamma + \nu_2 \beta = \varrho_2 \gamma_2 \tag{a'''}$$

mit

$$0 < \chi(\gamma_2) < \chi(\gamma) \tag{b'''}$$

bestünde, mit der zusätzlichen Minimaleigenschaft von γ_2. Ähnlich wie unter A) folgte dann $\gamma_2 \mid \gamma$. Elimination von γ aus (a) und (a''') würde dann

$$\mu \mu_2 \alpha + (\mu_2 \nu + \nu_2 \varrho)\beta = \varrho \varrho_2 \gamma_2$$

ergeben mit $\varrho\varrho_2$ prim zu γ, was mit Beachtung von (b''') der Minimaleigenschaft von γ widerspricht.

Somit ist die Existenz einer Betragsfunktion χ mit den Eigenschaften 1., 2., 3., 4. auch ein *hinreichendes* Kriterium für einen Z-Ring. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingelangt am 15. Dezember 1955.)

1.

Unter den *Loxodromen* eines Ebenenbüschels, also jenen Kurven, die sämtliche Ebenen durch eine feste Achse a unter einem konstanten Winkel schneiden, gibt es bekanntlich auch *Kreise*, und diesen kommt eine besondere Bedeutung zu; es handelt sich bei ihnen im Grunde genommen um die *Villarceauschen Kreise* der *Torusflächen* mit der Achse a.[1] Diese Kreise erscheinen im Normalriß auf eine zu a senkrechte Ebene — in Hinkunft kurz als „Grundriß" angesprochen — bekanntlich als *Ellipsen*, die einen Brennpunkt auf a haben. Dies mag zum Anlaß genommen werden, um allgemein nach jenen Loxodromen zu fragen, welche sich im Grundriß auf einen *Kegelschnitt* abbilden, der einen Brennpunkt auf a hat, d. h. nach Loxodromen, welche auf einem Zylinder 2. Grades verlaufen, der die Loxodromenachse zur Brennlinie hat. Man stößt dabei auf eine Sorte von speziellen Raumkurven, die auch noch in anderer Hinsicht bemerkenswert sind: Es sind *affine Böschungslinien*, die als *vierfache Loxodromen* angesehen werden können und die *D-Kurven* des Trägerzylinders 2. Grades darstellen; sie hängen überdies mehrfach mit den *Drehflächen konstanter Krümmung* zusammen.

2.

Sei mit $\varepsilon > 0$ und $p > 0$

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p \tag{1}$$

die Polargleichung des gegebenen Kegelschnitts l'. Die zum Schnitt-

[1] Vgl. hierzu *E. Müller:* Kreise als Loxodromen, Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73—96 und *W. Wunderlich:* Kreise als Doppelloxodromen, Arch. Math. (im Druck).

winkel σ gehörigen Loxodromen des Ebenenbüschels $\varphi = \text{const}$ sind gekennzeichnet durch das Bogenelement $ds = r\,d\varphi/\sin\sigma$, also durch die Differentialgleichung

$$dr^2 + dz^2 = m^2 r^2 d\varphi^2 \text{ mit } m = \operatorname{ctg}\sigma. \tag{2}$$

Die gesuchten Loxodromen stellen sich bei gleichzeitigem Bestehen der Gleichungen (1) und (2) ein.

Die Elimination von φ aus (1) und (2) führt über

$$d\varphi = \frac{p\,dr}{r\sqrt{\varepsilon^2 r^2 - (p-r)^2}}$$

auf die Differentialgleichung

$$dz^2 = \frac{m^2 p^2 - \varepsilon^2 r^2 + (p-r)^2}{\varepsilon^2 r^2 - (p-r)^2}\,dr^2, \tag{3}$$

welche die *Trägerdrehflächen* der betrachteten Loxodromen charakterisiert. Jede der zur Untersuchung stehenden Loxodromen l verläuft ganz auf einer solchen Drehfläche Φ, ihre sämtlichen Meridiane unter dem konstanten Winkel σ schneidend.

Unter vorläufiger Zurückstellung des parabolischen Falls $\varepsilon = 1$ (vgl. diesbezüglich Abschn. 7) führen wir jetzt vermöge

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2},\quad b^2 = pa,\quad e = \varepsilon a \tag{4}$$

die Halbachsen a, b und die lineare Exzentrizität e des Grundkegelschnitts l' (1) ein; überdies vollziehen wir in (3) die Substitution

$$r = a - u. \tag{5}$$

Damit stellt sich der *Meridian* der Drehfläche Φ in den kartesischen Koordinaten u, z durch das elliptische Integral

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{u^2 - f^2}{e^2 - u^2}}\,du \text{ mit } f^2 = e^2 - m^2 b^2 \tag{6}$$

dar. Dieser Meridian gehört nun auch zu jener *zweiten Drehfläche* Ψ, die durch Deutung von u und z als Zylinderkoordinaten erklärt ist und die sich bekanntlich durch *konstante Gaußsche Krümmung*

$$K = \frac{1}{e^2 - f^2} = \frac{1}{m^2 b^2} = \frac{1-\varepsilon^2}{p^2 \operatorname{ctg}^2\sigma} \tag{7}$$

auszeichnet. *Unsere Loxodromen verlaufen mithin für* $\varepsilon \neq 1$ *auf Drehflächen* Φ, *die als Hüllgebilde einer um die Loxodromenachse kreisenden*

Drehfläche Ψ konstanter Krümmung entstehen, deren eigene Achse im Abstand a parallel zur Loxodromenachse angeordnet ist.

Für $\varepsilon < 1$ - - *Ellipse* als Loxodromengrundriß -- ist die erzeugende Drehfläche Ψ gemäß (7) von *positiver* konstanter Krümmung. Die drei bekannten Formen solcher Flächen, der *Spindeltypus*, die *Kugel* und der *Wulsttypus*, stellen sich ein, je nachdem $f^2 \lessgtr 0$, also $|\cos\sigma| \gtrless \varepsilon$. Im zweiten Fall stößt man auf die Villarceauschen Loxodromenkreise des Torus, welche den Ausgangspunkt bildeten: der dritte Fall ist in Abb. 1 illustriert.

Für $\varepsilon > 1$ — *Hyperbel* als Loxodromengrundriß — ist die Drehfläche Ψ von *negativer* konstanter Krümmung, und zwar stets vom *Ringtypus*.

Die übrigen Loxodromen auf den Drehflächen Φ gehen aus den hier betrachteten Loxodromen durch die einfache Raumtransformation $\varphi' = k\varphi$ (mit konstantem k) hervor, die von *E. Müller* „*achsiale Winkelstreckung*" genannt wurde[1]. Ihre Grundrisse sind mithin vom Brennpunkt aus winkelgezerrte Kegelschnitte[2].

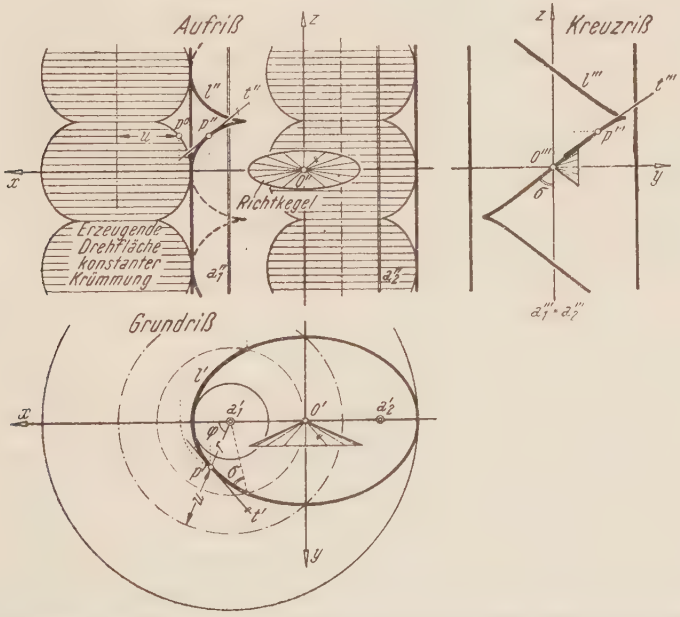

Abb. 1: Darstellung einer zur Annahme $\varepsilon = 2/3$, $\sigma = 52{,}5^0$ gehörigen Loxodrome.

[2] Eine ausführliche Darstellung der Verhältnisse auf dem *Torus* findet man bei *W. Wunderlich:* Über die Torusloxodromen, Mh. Math. 56 (1952), 313—334.

3.

Gehen wir nun — weiterhin unter Beschränkung auf $\varepsilon \neq 1$ — mittels

$$x = e + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{8}$$

zu kartesischen Koordinaten über, dann kommt dem über dem Grundkegelschnitt l' (1) errichteten *Zylinder* 2. Grades Γ die Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{9}$$

zu. Für die auf Γ verlaufenden Loxodromen nimmt die Bedingung $r\,d\varphi = ds.\sin\sigma$ wegen

$$r = a - \varepsilon x \tag{10}$$

und

$$(r\,d\varphi)^2 = dx^2 + dy^2 - dr^2 = (1-\varepsilon^2)dx^2 + dy^2$$

die Gestalt

$$b^2dx^2 + a^2dy^2 = a^2\sin^2\sigma.(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{11}$$

an. Man ersieht daraus, daß *die Tangenten der Loxodrome parallel sind zu den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades*, der durch (11) gekennzeichnet, also zum Zylinder Γ *konzyklisch* ist, d. h. mit diesem die Kreisschnittebenen gemeinsam hat. Unsere Loxodromen sind mithin *affine Böschungslinien.*

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe, sind die auf einer *Quadrik* verlaufenden Kurven mit einem konzyklischen Tangentenrichtkegel 2. Grades ihre *D-Linien*, d. h. jene Flächenkurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren.[3] *Unsere Loxodromen sind mithin die D-Linien des Zylinders 2. Grades* Γ.

4.

Nach den soeben gemachten Feststellungen liegt es auf der Hand, daß der die Loxodromenachse abgebende Brennstrahl a_1 ($x = e$, $y = 0$) des Trägerzylinders Γ nicht vor den übrigen drei Brennstrahlen $a_2(x = -e, y = 0)$, $b_1(x = 0, y = ei)$, $b_2(x = 0, y = -ei)$ ausgezeichnet sein kann, sondern daß auch diese als Achsen unserer Loxodrome angesehen werden dürfen. Die betrachteten Kurven sind mithin *vierfache Loxodromen*, und zwar durchsetzen sie, wie unmittelbar einzusehen ist, die Ebenenbüschel a_1 und a_2 unter demselben konstanten Winkel σ,

[3] *W. Wunderlich:* Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien auf Quadriken, Mh. Math. 55 (1951), 76—81.

die (imaginären) Büschel b_1 und b_2 hingegen unter einem anderen (u. U. gleichfalls reellen) gemeinsamen Winkel τ, wobei

$$\sin^2\sigma : \sin^2\tau = b^2 : a^2 = (1 - \varepsilon^2) : 1. \tag{12}$$

Diese Beziehung ergibt sich, wenn man in der invarianten Bedingung (11) x und y, a und b, sowie σ und τ vertauscht.

Es liegt hier ein Sonderfall eines allgemeineren, bei anderer Gelegenheit dargelegten Sachverhaltes vor, demzufolge die D-Linien eines *Kegels 2. Grades* Loxodromen der sechs Brennebenenbüschel des Kegels sind;[4] im gegenständlichen Grenzfall des elliptischen oder hyperbolischen Zylinders bleiben nur vier eigentliche Büschel übrig.

5.

Vergleich von (5) und (10) liefert $u = \varepsilon\, x$ und damit auf Grund von (6) die folgende Darstellung für den *Aufriß* (xz-Projektion) unserer Loxodromen:

$$z = \pm\,\varepsilon \int \sqrt{\frac{x^2 - \varepsilon^{-2} f^2}{a^2 - x^2}}\, dx. \tag{13}$$

Das bedeutet geometrisch, daß der *Loxodromenaufriß affin zum Meridian der Drehfläche konstanter Krümmung* Ψ ist (vgl. Abb. 1).

Aus Gründen der Gleichberechtigung ist etwas Entsprechendes für den *Kreuzriß* (yz-Projektion) zu erwarten. In der Tat, geht man in (13) mittels (9) zur Veränderlichen y über, so erhält man

$$z = \pm\,\frac{ei}{b} \int \sqrt{\frac{y^2 - m^2 b^4 e^{-2}}{b^2 - y^2}}\, dy. \tag{14}$$

Mithin ist auch der *Loxodromenkreuzriß affin zum Meridian einer gewissen Drehfläche konstanter Krümmung* (vom Wert $e^2/b^2 f^2$). Im elliptischen Fall ($\varepsilon < 1$) handelt es sich allerdings um eine imaginäre Affinität, im hyperbolischen Fall ($\varepsilon > 1$) liegt jedoch eine reelle Affinität vor.

Denkt man sich bei elliptischem Grundzylinder Γ in dem der Abb. 1 zugrundeliegenden Fall $\cos^2\sigma < \varepsilon^2 (f^2 > 0)$ den Tangentenrichtkegel (11) durch Streckung der z-Koordinaten in einen Drehkegel verwandelt, so gehen unsere Loxodromen l in *echte Böschungslinien* auf dem unveränderten Zylinder über. Wird dieser schließlich durch Streckung der y-Abstände in einen *Drehzylinder* transformiert, so hat man (mit y als

[4] *W. Wunderlich:* Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades, Mh. Math. 58 (1954), 57—62.

Lotrichtung) das Ergebnis, daß die auf einem *waagrechten Drehzylinder verlaufenden Böschungslinien im Grundriß affin zu den Meridiankurven wulstartiger Drehflächen konstanter positiver Krümmung* erscheinen.[5]

6.

Lassen wir p und ε gleich stark über alle Grenzen wachsen ($p/\varepsilon \to e$), so plattet sich der hyperbolische Grundzylinder zur yz-Ebene ab und wir gelangen mit $a \to 0$, $b^2 \to -e^2$ zu *ebenen (Doppel-) Loxodromen*

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{m^2 e^2 - y^2}{e^2 + y^2}}\, dy \tag{15}$$

mit dem parallelen Achsenpaar $x = \pm e$, $y = 0$. Jede dieser speziellen Loxodromen, auf die schon bei früherer Gelegenheit hingewiesen wurde[6], ist der Meridian einer Drehfläche konstanter negativer Krümmung vom konischen Typ und liegt auf zwei weiteren, spiegelgleichen Drehflächen konstanter negativer Krümmung vom Ringtypus, beschrieben durch

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{(1+m^2)\, e^2 - r^2}{r^2 - e^2}}\, dr. \tag{16}$$

Die übrigen Loxodromen einer solchen pseudosphärischen Drehfläche gehen aus den hier genannten ebenen durch achsiale Winkelzerrung hervor, erscheinen also im Grundriß als sogenannte *Ährenkurven*[7].

7.

In dem bisher zurückgestellten Grenzfall $\varepsilon = 1$ liegt ein *parabolischer Grundzylinder* Γ vor. Die Differentialgleichung (3) der auf ihm verlaufenden Loxodromen des Brennebenenbüschels reduziert sich jetzt auf

$$dz^2 = \frac{(1 + m^2)p - 2r}{2r - p}\, dr^2 \tag{17}$$

und ist elementar integrierbar. Setzen wir etwa

---

[5] Eine solche Böschungslinie findet sich bei *E. Müller - J. Krames:* Die Zyklographie (Wien 1929), 368.

[6] *W. Wunderlich:* Über die ebenen Loxodromen, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 162 (1953), 285—292.

[7] Die Loxodromen der eigentlichen *Pseudosphäre* (mit einer Traktrix als Meridian) bilden sich im Grundriß auf *hyperbolische Spiralen* ab.

$$r - \frac{p}{2} = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta) \text{ mit } q = \frac{m^2 p}{2}, \tag{18}$$

so geht (17) über in

$$dz = \pm \frac{q}{2}(1 + \cos\theta)\, d\theta,$$

so daß — bei Beschränkung auf das obere Vorzeichen und Unterdrückung der Integrationskonstante —

$$z = \frac{q}{2}(\theta + \sin\theta). \tag{19}$$

Gehen wir vermöge

$$x = r\cos\varphi - \frac{p}{2},\ y = r\sin\varphi \tag{20}$$

zu kartesischen Koordinaten über, so kommt dem Grundzylinder die Gleichung

$$2p\,x + y^2 = 0 \tag{21}$$

zu, und mit Rücksicht auf $x = \frac{1}{2}p - r$ finden wir über (18)

$$x = -\frac{q}{2}(1 - \cos\theta),\ y = \pm mp\sin\frac{\theta}{2}, \tag{22}$$

womit zusammen mit (19) eine vollständige Parameterdarstellung unserer Loxodrome vorliegt. Dieselbe erscheint im *Aufriß* (auf die xz-Ebene) als *gemeine Zykloide*, deren Rollkreisdurchmesser den Wert q hat. Eine kongruente Zykloide gibt den Meridian der Trägerdrehfläche Φ ab. Die im *Kreuzriß* auftretende Bildkurve kann als *Orthogonaltrajektorie einer Translationsschar von Sinuslinien* $y = mp.\sin(z/p + \text{const})$ gedeutet werden.

Die vorliegende Loxodrome durchsetzt auch das uneigentliche Brennebenenbüschel $y = \text{const}$ unter dem festen Winkel σ, ist daher eine *echte Böschungslinie* für die Lotrichtung y und genügt der Tangentenbedingung

$$dx^2 + dz^2 = m^2 dy^2. \tag{23}$$

Diese Böschungslinien haben als Grenzform der wohlbekannten Kurven konstanter Steigung auf Drehquadriken mit lotrechter Achse gelegentlich Beachtung gefunden.[8]

[8] Z. B. bei *Müller-Krames*, a. a. O., S. 372.

Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten.

Von

Wilfried Nöbauer, Wien.

(Eingelangt am 10. Jänner 1955.)

Einleitung: In dieser Arbeit werden meine bisherigen Untersuchungen[1] auf den Fall von k Unbestimmten verallgemeinert. Dies geschieht dadurch, daß man in der direkten Summe von k ganzzahligen Polynomringen in k Unbestimmten die direkte Summe von k Restpolynomidealen mod n bildet und den Restklassenring nach diesem Ideal betrachtet. Greift man aus diesem Ring jene Restklassen heraus, deren Elemente eine umkehrbar eindeutige Abbildung des k-dimensionalen Vektorraumes über den Restklassenring mod n auf sich bewirken, so erhält man[2] eine Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$. Von den Untergruppen dieser Gruppe sind hier nur die von Interesse, die aus lauter Restklassen mit Repräsentanten der selben Gestalt bestehen, die sogenannten natürlichen Untergruppen. Auf einige dieser natürlichen Untergruppen wird eingegangen. Insbesondere wird eine Klasse solcher Untergruppen betrachtet, die als Spezialfall auch $\mathfrak{G}_n^k$ selbst einschließt, und für diese Klasse ähnlich wie in [1] eine Theorie der Gradverteilung entwickelt, nachdem zunächst der Grad eines Elementes von $\mathfrak{G}_n^k$ in sinngemäßer Verallgemeinerung von [1] als ganzzahliger, k-dimensionaler Vektor definiert wurde. Es zeigt sich wieder, daß sich das Problem auf die Fälle $n = p$ und $n = p^2$ zurückführen läßt und daß letzterer Fall so wie in [1] behandelt werden kann. Daneben werden auch noch verschiedene Sätze über die Struktur

---

[1] Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. S. B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **162**, 207—233 (1953). Diese Arbeit wird stets zitiert als [1].

[2] Diese Gruppe scheint für $n = p$ in der Literatur schon da und dort auf. Man vergleiche etwa:

Jordan, Traité des substitutions, Paris 1870, S. 88—91.

Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, Braunschweig 1899, S. 361—373.

Dickson (mit $k = 1$), The analytic representation of substitutions on a power of prime number of letters. Annals of Math. **11**, 65—120 (1897).

von $\mathfrak{G}_n^k$ und einigen Untergruppen dieser Gruppe bewiesen und verschiedene Hilfssätze über Restpolynome in k Unbestimmten abgeleitet, die teilweise auch an sich von Interesse sind.

Für das Verständnis vieler Beweise ist die Kenntnis von [1] erforderlich; in § 15 werden auch noch einige Sätze aus einer anderen Arbeit[3] von mir verwendet.

§ 1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{x}$ den Vektor $(x_1, x_2 \ldots x_k)$, mit Γ den Ring der ganzen rationalen Zahlen und verstehen demnach unter $\Gamma[\mathfrak{x}]$ den Polynomring über Γ in k Unbestimmten. Wir bilden die direkte Summe von k Exemplaren dieses Ringes und bezeichnen sie mit Γ_k. Die Elemente dieses neuen Ringes nennen wir Polynomvektoren, denn wir können jedes von ihnen in Komponentenschreibweise darstellen; dies drücken wir aus durch Gleichungen der Gestalt:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (f_\nu(\mathfrak{x}))$$

In Γ_k bilden, wie ersichtlich, jene Polynomvektoren, deren Komponenten sämtlich Restpolynome nach einer natürlichen Zahl n sind, welche also, wenn mit $\mathfrak{o}$ der k-zeilige Nullvektor bezeichnet wird,

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{o} \bmod n \text{ für jeden ganzzahligen Vektor } \mathfrak{x}$$

erfüllen, ein Ideal A_k^n, dessen Elemente wir als Restpolynomvektoren mod n bezeichnen.

Sind nun F, G ... Elemente des Restklassenringes $\Gamma_k \mid A_k^n$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ... Repräsentanten dieser Restklassen, so führen wir im Restklassenring die Operation des „Einsetzens" ein, indem wir als „Einsetzprodukt" FG die durch den Polynomvektor

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}) = (f_\nu(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})))$$

repräsentierte Restklasse bezeichnen[4]. Wie leicht zu erkennen, hängt FG nicht von der Wahl der Repräsentanten in F und G ab. Man sieht auch leicht, daß diese Operation assoziativ ist und als beiderseitiges Einheitselement E die durch den Vektor $\mathfrak{x}$ repräsentierte Restklasse besitzt, weshalb $\Gamma_k \mid A_k^n$ eine Halbgruppe $\mathfrak{H}_n^k$ ist.

Wir ordnen nun jedem Element von $\mathfrak{H}_n^k$ eine Abbildung des von allen k-zeiligen Vektoren aus Elementen des Restklassenringes mod n gebildeten Vektorraumes V_n zu, nämlich dem durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ repräsentierten Element die Abbildung

[3] Über eine Gruppe der Zahlentheorie. Mh. Math. 58, 181–192 (1954). Wird zitiert als [2].

[4] In [1] war dieses Produkt definiert als die durch $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$ repräsentierte Restklasse, was aber im wesentlichen auf das selbe hinauskommt.

$$\mathfrak{a} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \qquad \mathfrak{a} \in V_n$$

Dadurch wird $\mathfrak{H}_n^k$ umkehrbar eindeutig auf eine Teilmenge aller eindeutigen Abbildungen von V_n in sich bezogen, und definiert man als Produkt $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$ der Abbildungen $i \to \mathfrak{u}(i)$ und $i \to \mathfrak{v}(i)$ die Abbildung $i \to \mathfrak{u}(\mathfrak{v}(i))$, so wird diese Beziehung zu einem Isomorphismus.

Wir sehen: Ein Produkt $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$ zweier solcher Abbildungen ist dann sicher nicht umkehrbar eindeutig, wenn einer der Faktoren nicht umkehrbar eindeutig ist. Da die dem Einheitselement E von $\mathfrak{H}_n^k$ zugeordnete Abbildung jedoch sicher umkehrbar eindeutig ist, können nur Elemente aus $\mathfrak{H}_n^k$ mit zugeordneter umkehrbar eindeutiger Abbildung ein inverses Element besitzen. Diese Elemente besitzen jedoch tatsächlich ein Inverses, denn die ihnen zugeordneten Abbildungen bilden eine Untergruppe der symmetrischen Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_{n^k}$.

Wir setzen noch fest: Der Polynomvektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ erzeugt ein vollständiges Vektorsystem mod n soll heißen, die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ von V_n auf sich ist umkehrbar eindeutig, und haben dann

Satz I: Der Kern $\mathfrak{G}_n^k$ der Halbgruppe $\mathfrak{H}_n^k$ besteht gerade aus den Elementen, deren Polynomvektoren ein vollständiges Vektorsystem mod n erzeugen.

§ 2. Von den Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$ sind besonders jene von Interesse, deren Elemente sich alle durch Polynomvektoren von ganz bestimmter Gestalt repräsentieren lassen: solche Untergruppen wollen wir natürliche Untergruppen nennen.

Wie man nun sofort erkennt, bilden alle die Elemente von $\mathfrak{G}_n^k$, die einen Repräsentanten der Gestalt:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, g_{l+1}(\mathfrak{x}) \ldots g_k(\mathfrak{x}))$$

oder, kürzer geschrieben

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_l, \mathfrak{g}_{k-l}(\mathfrak{x})) \tag{1}$$

besitzen, so eine natürliche Untergruppe von $\mathfrak{G}_n^k$; wir bezeichnen sie mit ${}_l\mathfrak{G}_n^k$. Setzt man nun noch ${}_0\mathfrak{G}_n^k = \mathfrak{G}_n^k$, so erhält man eine Kette von Untergruppen von $\mathfrak{G}_n^k$:

$${}_l\mathfrak{G}_n^k \qquad 0 \leqq l \leqq k$$

die mit $\mathfrak{G}_n^k$ beginnt und beim Einheitselement endet, worin jede Untergruppe die folgende in sich enthält.

Bemerkung: Allgemeiner bilden auch alle die Elemente von $\mathfrak{G}_n^k$, die sich durch einen Polynomvektor repräsentieren lassen, bei dem die ν_i — te Komponente für $i = 1, 2 \ldots l$ durch x_{ν_i} gegeben ist, eine natür-

liche Untergruppe und man kann sich leicht überlegen, daß diese Untergruppe stets konjugiert zu ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ ist.

Von nun an betrachten wir die Gruppe ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ für irgendein zulässiges l. Alle erhaltenen Resultate gelten also auch für $l = 0$.

§ 3. Wir definieren nun den Grad eines Polynomes in k Unbestimmten so, wie es in der Algebra üblich ist, nur geben wir dem Polynom 0 als einzigem den Grad -1. Als Grad eines Elementes des Restklassenringes $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^n$, wenn A^n das Ideal der Restpolynome mod n in k Unbestimmten bedeutet, bezeichnen wir den kleinsten der Grade seiner Repräsentanten. Als Gradvektor $\{\mathfrak{f}\}$ eines Polynomvektors $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ bezeichnen wir den aus den Graden seiner Komponenten gebildeten Vektor. Ist schließlich F ein Element des Restklassenringes $\Gamma_k \mid A_k^n$, so suche ich mir einen Repräsentanten $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von F, bei dem jede Komponente kleinstmöglichen Grad hat, setze $\{F\} = \{\mathfrak{f}\}$ und bezeichne $\{F\}$ als Gradvektor von F.

Ist nun $G \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$, so haben die ersten l Komponenten von $\{G\}$ ersichtlich sämtlich den Wert 1; in diesem Falle brauchen wir nur den von den übrigen $k - l$ Komponenten gebildeten Vektor betrachten, den wir als abgekürzten Gradvektor von G bezeichnen. Es möge das Symbol $[G]$ für $G \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$ stets diesen abgekürzten Gradvektor bedeuten.

Wir bezeichnen einen Repräsentanten eines Elementes von $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^n$ als gradtreu, wenn sein Grad gleich dem Grad des von ihm repräsentierten Elementes ist, ebenso bezeichnen wir einen Repräsentanten $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von $F \in \Gamma_k \mid A_k^n$ als gradtreu, wenn $\{\mathfrak{f}\} = \{F\}$ gilt. Unter einem Normalrepräsentanten für $G \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$ wollen wir einen Repräsentanten der Gestalt (1), unter einem gradtreuen Normalrepräsentanten einen solchen mit $\{\mathfrak{g}_{k-l}\} = [G]$ verstehen. Unter einem genauen und gradtreuen Repräsentantensystem einer Menge von Restklassen nach A^n oder A_k^n wollen wir ein Repräsentantensystem verstehen, welches für jede Restklasse der Menge genau einen gradtreuen Repräsentanten enthält.

Im folgenden werden öfter Gleichungen oder Ungleichungen zwischen Vektoren vorkommen, wie z. B. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Solche Beziehungen sollen stets gleichbedeutend sein mit dem Bestehen der entsprechenden Relation zwischen sämtlichen Komponenten der Vektoren; die beiden angeführten Beziehungen z. B. besagen, daß gilt

$$a_i \leqq b_i \text{ bzw. } c_i = \max(a_i, b_i) \text{ für alle } i.$$

Um zu beschreiben, wie die Grade in der Gruppe ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ verteilt sind, führen wir die Gradverteilungsfunktion ${}_lE_n^k(t)$ durch folgende Festsetzung ein:

${}_lE_n^k(\mathfrak{t})$ bedeute die Anzahl der Elemente $G \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$ mit $[G] \leqq \mathfrak{t}$, wobei $\mathfrak{t}$ irgendeinen ganzzahligen Vektor mit $k - l$ Komponenten bezeichnet; wie leicht zu sehen ist, gilt

$$ {}_lE_n^k(\mathfrak{t}) = 0 \text{ für } \mathfrak{t} \gtrless (1, 1, \ldots 1). $$

Die Kenntnis dieser Funktion genügt tatsächlich, um zu jedem gegebenen ganzzahligen Vektor $\mathfrak{f}$ die Anzahl der Gruppenelemente mit $[G] = \mathfrak{f}$ zu berechnen — wir bezeichnen sie mit $\delta(\mathfrak{f})$ — wie aus folgendem Satz hervorgeht:

Satz II: Die Anzahl der Elemente $G \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$ mit $[G] = \mathfrak{f}$ ist gegeben durch folgende Beziehung, wenn $k - l = r$ gesetzt wird:

$$ \delta(\mathfrak{f}) = {}_lE_n^k(s_1, s_2 \ldots s_r) - \sum_i {}_lE_n^k(s_1, s_2 \ldots s_i - 1 \ldots s_r) + $$

$$ + \sum_{i,j} {}_lE_n^k(s_1, \ldots s_i - 1, \ldots s_j - 1, \ldots s_r) - \ldots + (-1)^k {}_lE_n^k(s_1 - 1, \ldots s_r - \mathfrak{i}). $$

Beweis: Jedes Element mit $[G] = \mathfrak{f}$ wird auf der rechten Seite gerade im ersten Glied gezählt. Enthält aber ein Element mit $[G] = \mathfrak{t} \leqq \mathfrak{f}$ genau m unter seinen Gradkomponenten t_i mit $t_i = s_i$, so wird es auf der rechten Seite gezählt mit der Vielfachheit:

$$ 1 - \binom{r-m}{1} + \binom{r-m}{2} - \ldots = 0 $$

woraus die Behauptung folgt.

§ 4. Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß n das Produkt zweier teilerfremder Zahlen ist und beweisen

Hilfssatz 1: Ein Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erzeugt dann und nur dann ein volles Vektorsystem mod $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, wenn er sowohl mod a, als auch mod b ein solches erzeugt.

Der Beweis wird ganz analog wie der von Hilfssatz 1 in [1] geführt, nur hat man statt der dort auftretenden gewöhnlichen Kongruenzen die ihnen entsprechenden Vektorkongruenzen zu betrachten.

Dieser Hilfssatz ist die Grundlage für folgenden

Satz III: Ist $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, dann ist ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ direktes Produkt aus einer zu ${}_l\mathfrak{G}_a^k$ und einer zu ${}_l\mathfrak{G}_b^k$ isomorphen Gruppe.

Beweis: Nach Hilfssatz 1 ist jedem $F \in {}_l\mathfrak{G}_n^k$ eindeutig ein Elementpaar $[F_a, F_b]$ mit $F_a \in {}_l\mathfrak{G}_a^k$ und $F_b \in {}_l\mathfrak{G}_b^k$ zugeordnet, nämlich das von irgendeinem Repräsentanten für F repräsentierte Paar, das ersichtlich tatsächlich aus Elementen von ${}_l\mathfrak{G}_a^k$ und ${}_l\mathfrak{G}_b^k$ besteht. Bei dieser Zuordnung wird jedes Paar höchstens einmal erfaßt, aber auch mindestens einmal, denn sind $\mathfrak{u}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ Normalrepräsentanten der beiden Elemente des Paares, so bestimme man u und v aus:

$$u \equiv 1 \bmod a \qquad v \equiv 0 \bmod a$$
$$u \equiv 0 \bmod b \qquad v \equiv 1 \bmod b$$

und bilde damit den Polynomvektor:

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = u\,\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) + v\,\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$$

Wegen $u + v \equiv 1 \bmod ab$ und Hilfsatz 1 repräsentiert $\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ ein Element aus ${}_{l}\mathfrak{G}_n^k$, dem das gegebene Paar zugeordnet ist. Sind schließlich F, G zwei Elemente aus ${}_{l}\mathfrak{G}_n^k$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ihre Repräsentantenvektoren, so wird FG repräsentiert durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$, einen Vektor, der sowohl $F_a\,G_a$ als auch $F_b\,G_b$ repräsentiert.

Satz IV: Ist $(a, b) = 1$, *dann gilt* ${}_{l}E_{ab}^k(\mathfrak{t}) = {}_{l}E_a^k(\mathfrak{t})\ {}_{l}E_b^k(\mathfrak{t})$.

Der Beweis erfolgt nach dem selben Prinzip wie der von Satz IV in [1], nur treten jetzt an Stelle der Grade der Elemente die abgekürzten Gradvektoren, und die Gleichungen sind daher so zu verstehen, wie in § 3 erklärt wurde.

§ 5. Als Vorbereitung für den Fall $n \cdot \cdot p^e$ geben wir zunächst folgende beiden Hilfssätze:

Hilfssatz 2: Ein Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ *erzeugt dann und nur dann ein vollständiges Vektorsystem mod* $p^e (e > 1)$, *wenn er mod* p *ein solches erzeugt und für seine Funktionaldeterminante* $D\,\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ *gilt:*

$D\,\mathfrak{a}(\mathfrak{k}) \not\equiv 0 \bmod p$ *für jeden ganzzahligen Vektor* $\mathfrak{k}$.

Dies ist das Analogon zu Hilfssatz 8 in [1] und der Beweis wird auch analog geführt wie dort, nur muß man statt von dem dort verwendeten zahlentheoretischen Hilfssatz hier von dem folgenden Satz ausgehen:

Ist $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ irgendein Polynomvektor, und der ganzzahlige Vektor $\mathfrak{u}$ Lösung von

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{o} \bmod p^{a-1} \qquad (a > 1)$$

dann beträgt die Anzahl der inkongruenten Lösungsvektoren von

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{o} \bmod p^a$$

die mod p^{a-1} genommen zu $\mathfrak{u}$ kongruent sind, dann und nur dann genau 1, wenn

$$D\,\mathfrak{d}(\mathfrak{u}) \not\equiv 0 \bmod p.$$

Wir wollen den Beweis dieses Satzes kurz skizzieren: Es ist[5] mit $\mathfrak{t} = (t_\nu)$

[5] Wir definieren zu dem Polynom a und den Polynomvektoren $\mathfrak{t}_i$ die Polynomvektoren $a\mathfrak{t}_i$, $\Sigma\,\mathfrak{t}_i$, $\mathfrak{t}_i\mathfrak{t}_k$ und $\dfrac{\partial\,\mathfrak{t}_i}{\partial\,x_k}$ so, wie es in der Vektorrechnung üblich ist.

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{u} + p^{a-1}\mathfrak{t}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{u}) + p^{a-1}\sum_{j=1}^{k} t_j \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x_j}\ (\mathfrak{u}) + p^{2a-2}\,\mathfrak{r}(\mathfrak{t}, \mathfrak{u})$$

faßt man die $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x_j}$ und $\mathfrak{t}$ als Spaltenvektoren auf und führt man die daraus gebildete Matrix

$$\Theta(\mathfrak{x}) = \left(\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x_1}, \ \cdots \ \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x_k}\right)$$

ein, so erhält[6] man:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{u} + p^{a-1}\mathfrak{t}) \equiv \mathfrak{d}(\mathfrak{u}) + p^{a-1}\,\Theta(\mathfrak{u})\,\mathfrak{t} \qquad \bmod p^a$$

Die Anzahl der mod p^{a-1} zu $\mathfrak{u}$ kongruenten Lösungsvektoren von

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{o} \bmod p^a$$

ist daher genau so groß wie die der Lösungsvektoren von

$$\Theta(\mathfrak{u})\,\mathfrak{t} \equiv -\frac{\mathfrak{d}(\mathfrak{u})}{p^{a-1}} \bmod p$$

Deren Anzahl ist aber gerade dann 1, wenn $|\,\Theta(\mathfrak{u})\,| = D\,\mathfrak{d}(\mathfrak{u}) \not\equiv 0 \bmod p$.

So wie in [1] folgt aus Hilfssatz 2 sofort folgender

Hilfssatz 2a: Ein Polynomvektor $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erzeugt dann und nur dann ein volles Vektorsystem mod $p^e (e > 1)$, wenn er mod p^2 ein solches erzeugt.

Hilfssatz 3: Bezeichnet man die Anzahl der aus den Elementen des Restklassenringes mod n zu bildenden k-zeiligen quadratischen Matrizen A, deren Determinante $(|A|, n) = 1$ erfüllt, mit[7] $\varphi_k(n)$, so gilt für den Fall, daß $n = p$ eine Primzahl ist:

$$\varphi_k(p) = \prod_{v=0}^{k-1} (p^k - p^v)$$

Den Beweis dieser bekannten Tatsache schenken wir uns.

§ 6. Wir haben nun die Restpolynome von A^{p^e} zu untersuchen[8].

[6] Wir erklären $\Theta(\mathfrak{u})\,\mathfrak{t}$ so, wie es in der Algebra üblich ist.

[7] Ersichtlich gilt ja: $\varphi_1(n) = \varphi(n)$, die Eulersche Funktion.

[8] Über Restpolynome in einer und mehreren Unbestimmten gibt es einige Arbeiten, die aber hier nicht verwendet wurden. Man vergleiche etwa:

Nagel, Über zahlentheoretische Polynome. Norsk. Matem. Tidsskr. **1**, 14—23 (1919).

Kempner, Polynomials and their residue systems. Trans. Amer. Math. Soc. **22**, 240—288 (1921).

Kempner, Polynomials of several variables and their residue systems. Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 287—298 (1925).

Litzinger, A basis for residual polynomials in n variables. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 216—225 (1935).

Zunächst beweisen wir:

Hilfssatz 4: Ist $f(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p^e, dessen Grad in x_j höchstens n_j beträgt $(j = 1, 2 \ldots k)$ und setzt man

$$r_0(x_j) = 1, \qquad r_l(x_j) = \prod_{\nu=0}^{l-1} (x_j - \nu) \text{ für } l > 0,$$

bezeichnet weiter $\varepsilon(i)$ den Exponenten, zu dem p in der Primzahlzerlegung von $i!$ vorkommt, so läßt sich $f(\mathfrak{x})$ auf folgende Art darstellen:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{0 \leqq \mathfrak{i} \leqq \mathfrak{n}} c_{\mathfrak{i}}\, p^{e - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu)}\, r_{i_1}(x_1) \ldots r_{i_k}(x_k) \tag{2}$$

Dabei ist $p^r = 1$ zu setzen, wenn $r \leqq 0$ ist, und die $c_{\mathfrak{i}} = c_{i_1 \ldots i_k}$ sind sämtlich ganze Zahlen.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Unbestimmten, denn Hilfsatz 3 in [1] ist identisch mit dem zu beweisenden Satz für $k = 1$:

Zunächst gestattet $f(\mathfrak{x})$ ersichtlich folgende Darstellung:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{i=0}^{n_k} g_i(\bar{\mathfrak{x}})\, r_i(x_k) \tag{3}$$

wenn $\bar{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2 \ldots x_{k-1})$ gesetzt wird. Man überlegt sich leicht, daß sämtliche $g_i(\bar{\mathfrak{x}})$ in x_j höchstens den Grad n_j haben. In dieser Darstellung ist nun wegen

$$f(\bar{\mathfrak{x}}, 0) = g_0(\bar{\mathfrak{x}}) \equiv 0 \bmod p^e \text{ für ganzes } \bar{\mathfrak{x}}$$

das $g_0(\bar{\mathfrak{x}})$ Restpolynom mod p^e. Durch Induktion nach i folgt genau so wie in [1], daß sämtliche Glieder in (3) Restpolynome mod p^e sind. Gleichzeitig sieht man dabei, daß $g_i(\bar{\mathfrak{x}})$ für jedes i Restpolynom mod $p^{e-\varepsilon(i)}$ ist. Nun können wir nach Induktionsvoraussetzung auf die $g_i(\bar{\mathfrak{x}})$ den Hilfssatz 4 anwenden, und setzt man die nach (2) erhaltenen Ausdrücke für die $g_i(\bar{\mathfrak{x}})$ in (3) ein, so sieht man die Richtigkeit des Satzes auch für k Unbestimmte.

Zu diesem Hilfssatz müssen wir noch drei Zusätze beweisen:

Zusatz a: Jedes Polynom der Gestalt (2) *ist Restpolynom mod p^e.*

Dies folgt daraus, daß $r_i(x)$ Restpolynom mod $p^{\varepsilon(i)}$ ist.

Zusatz b: Der Grad des Polynoms (2) *ist gegeben durch $q = \max \sum_{\nu=1}^{k} i_\nu$, aufgesucht aus allen Gliedern mit $c_{\mathfrak{i}} \neq 0$.*

Beweis: Selbstverständlich gilt $[f] \leqq q$. Wir denken uns nun alle Summanden aus (2) mit $c_i \not\equiv 0$ und $\sum_{\nu=1}^{k} i_\nu = q$ ausmultipliziert; nimmt man aus jedem der so erhaltenen Ausdrücke das Glied mit höchstem Grad und faßt diese Glieder zusammen, so erhält man eine Form vom Grad q, die nicht identisch verschwindet, da nicht zwei ihrer Glieder dasselbe Potenzprodukt der x_i enthalten können.

Zusatz c: Die Darstellung eines Restpolynomes mod p^e in der Gestalt (2) *ist stets nur auf eine Art möglich.*

Beweis: Angenommen, es liegen zwei Darstellungen des selben Restpolynomes vor, dann ist die Differenz der beiden Darstellungen eine Darstellung des Restpolynomes 0; da nun der Grad der Differenz gegeben ist durch $\max \sum_{\nu=1}^{k} i_\nu$, aufgesucht aus allen Summanden der Differenz mit $c_i \not\equiv 0$, müssen in der Differenz alle c_i verschwinden.

Die Verallgemeinerung von Hilfssatz 4 in [1] — wir beweisen sie wieder durch vollständige Induktion, indem wir von jenem Hilfssatz ausgehen — ist gegeben durch

Hilfssatz 5: Es sei $f(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p^e, in dem die Glieder für die Anordnung $x_{\nu_1}, x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_k}$ der Unbestimmten lexikographisch nach abnehmenden Graden geordnet sind. Das lexikographisch erste nicht verschwindende Glied sei gegeben durch

$$c\, x_{\nu_1}^{u_1} x_{\nu_2}^{u_2} \ldots x_{\nu_k}^{u_k}$$

Dann gilt: $c \equiv 0 \bmod p^{e - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(u_i)}$.

Beweis: Der Satz ist, wie gesagt, richtig für $k = 1$ und sei bewiesen für Polynome in höchstens k—1 Unbestimmten. Ist nun $f(\mathfrak{x})$ für die gegebene Anordnung lexikographisch geordnet, so kann ich setzen

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{m=u_1}^{0} x_{\nu_1}^{m} g_m(\bar{\mathfrak{x}}) \tag{4}$$

wenn $\bar{\mathfrak{x}} = (x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_k})$ gesetzt wird, und ersichtlich sind die $g_m(\bar{\mathfrak{x}})$ für die Anordnung $\bar{\mathfrak{x}}$ ihrer Variablen lexikographisch geordnet. Setzt man in (4) für $\bar{\mathfrak{x}}$ irgendeinen ganzzahligen Vektor u ein, so erhält man ein Respolynom mod p^e in einer Unbestimmten $f(x_{\nu_1}, \mathrm{u})$, wegen der Richtigkeit von Hilfssatz 5 für $k = 1$ ist daher $g_{u_1}(\bar{\mathfrak{x}})$ Restpolynom mod $p^{e-\varepsilon(u_1)}$. Da $g_{u_1}(\bar{\mathfrak{x}})$ nur k—1 Unbestimmte enthält, gilt für seinen lexikographisch

ersten Koeffizienten c, der ersichtlich auch lexikographisch erster Koeffizient von $f(\mathfrak{x})$ ist, die Beziehung

$$c \equiv 0 \bmod p^{c - \varepsilon(u_1) - \sum_{i=2}^{k} \varepsilon(u_i)} \qquad \text{w. z. z. w.}$$

§ 7. Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz 6: Ist $f(\mathfrak{x})$ Respolynom mod p und bezeichnet $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ den Polynomvektor $(x_\nu^p - x_\nu)$, so läßt sich $f(\mathfrak{x})$ auf folgende Art darstellen:

$$f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) + p\, h(\mathfrak{x})$$

wobei $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (g_\nu(\mathfrak{x}))$ ein Polynomvektor ist mit[9] $[g_\nu] \leqq [f] - p$ *für alle ν und $h(\mathfrak{x})$ ein Polynom mit $[h] \leqq [f]$.*

Geht man nämlich aus von der nach Hilfssatz 4 möglichen Darstellung (2) von $f(\mathfrak{x})$:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{0 \leqq i \leqq n} c_i\, p^{1 - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu)}\, r_{i_1}(x_1) \ldots r_{i_k}(x_k) \tag{5}$$

so kann man darin zunächst alle Summanden mit $i_1 \geqq p$ zusammenfassen und aus ihrer Summe $r_p(x_1)$ herausheben, von den übrigen Summanden vereinige man die mit $i_2 \geqq p$ und hebe aus ihrer Summe $r_p(x_2)$ heraus usw. Die nach dem Herausheben von $r_p(x_k)$ noch gebliebenen Summanden haben $\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) = 0$, so daß $f(\mathfrak{x})$ dadurch folgende Gestalt erhalten hat:

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\mathfrak{x})\, r_p(x_i) + p\, d(\mathfrak{x}) \tag{6}$$

Setzt man nun $r_p(x_i) = \prod_{\nu=0}^{p-1} (x_i - \nu) = x_i^p - x_i + p\, e(x_i)$ in (6) ein, so erhält man

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\mathfrak{x})\, (x_i^p - x_i) + p\, h(\mathfrak{x})$$

Da nun in (5) nach § 6, Zusatz b gilt: $\sum_{\nu=1}^{k} i_\nu \leqq [f]$ für alle Summanden, so gilt für die $g_i(\mathfrak{x})$ in (6) nach ihrer Entstehung $[g_i] \leqq [f] - p$, und zwar auch dann, wenn $[f] < p$ ist. Ebenso gilt $[d] \leqq [f]$ auf jeden Fall. Da nun offensichtlich gilt

$$h(\mathfrak{x}) = d(\mathfrak{x}) + \sum_{i=1}^{k} g_i(\mathfrak{x})\, e(x_i)$$

[9] Ein für allemal setzen wir fest, daß für ein Polynom $g(\mathfrak{x})$ stets $[g] < 0$ heißen soll $[g] = -1$.

so gilt wegen $[e] < p$ jedenfalls $[h] \leqq [f]$, und zwar auch für $[f] < p$.

Man erkennt unmittelbar, daß jedes Polynom der in Hilfssatz 6 angegebenen Gestalt Restpolynom mod p ist.

§ 8. Unsere nächste Aufgabe ist es, ein Repräsentantensystem für den Restklassenring $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^e}$ aufzustellen. Dies leistet uns

Hilfssatz 7: Man erhält ein genaues, gradtreues Repräsentantensystem für $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^e}$, wenn man in

$$g(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{i}} a_{\mathfrak{i}}\, x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} \tag{7}$$

jeden der Koeffizienten $a_{\mathfrak{i}}$ alle ganzen Zahlen von 0 bis $p^{e - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu)} - 1$ durchlaufen läßt, so daß ersichtlich nur solche Koeffizienten $a_{\mathfrak{i}}$ zu berücksichtigen sind, für welche der Vektor $\mathfrak{i} = (i_\nu)$ die Bedingung $\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) < e$ erfüllt.

Der Beweis erfolgt im Prinzip genau so, wie der von Hilfssatz 5 in [1]; man überlegt sich zuerst, daß jede Restklasse von $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^e}$ einen Repräsentanten aus (7) besitzt, was man durch sukzessives Abziehen geeigneter Restpolynome erkennt. Dann stellt man fest, daß zwei Polynome aus (7) nur dann in der selben Restklasse liegen, wenn sie identisch sind; dies erkennt man durch Betrachten ihrer Differenz und Anwendung von Hilfssatz 5. Schließlich hat man sich noch zu überlegen, daß jeder Repräsentant des Systemes gradtreu ist, was genau so wie in [1] geschieht.

Das durch Hilfssatz 7 gelieferte Repräsentantensystem hat für $e = 1$ folgende Gestalt:

$$g(\mathfrak{x}) = \sum_{i_\nu < p} a_{\mathfrak{i}}\, x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$$

wobei alle $a_{\mathfrak{i}}$ die Zahlen von 0 bis $p - 1$ durchlaufen; der Restklassenring $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^p$ hat daher genau p^{p^k} Elemente. Es gibt nun aber ersichtlich ebenfalls genau p^{p^k} eindeutige Abbildungen des k-dimensionalen Vektorraumes V_p aus Elementen des Primkörpers Π mod p auf Π, und da die Polynome jeder Restklasse von $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^p$ eineindeutig eine solche Abbildung erzeugen, haben wir folgenden[10]

Hilfssatz 8: Ist $\mathfrak{a} \to a_{\mathfrak{a}}$ eine eindeutige Abbildung des k-dimensionalen Vektorraumes V_p über den Primkörper Π mod p auf Π, so gibt es stets

[10] Vgl. *Weber*, a. a. O., S. 361.

genau ein Polynom $f(\mathfrak{x}) \in \Pi[\mathfrak{x}]$, dessen Grad in jeder Unbestimmten kleiner als p ist, so daß $f(\mathfrak{a}) = a_{\mathfrak{a}}$ für jedes $\mathfrak{a}$ gilt.

§ 9. Im Restklassenring $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^e}$ bilden die Elemente, deren Polynome Restpolynome mod p^{e-1} sind, ein Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$. Ebenso bilden im Restklassenring $\Gamma_k \mid A_k^{p^e}$ die Restklassen, welche einen Polynomvektor der Gestalt

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = (0, 0 \ldots 0, r_1(\mathfrak{x}) \ldots r_{k-l}(\mathfrak{x})) \quad \text{alle } r_\nu(\mathfrak{x}) \in A^{p^{e-1}}$$

als Repräsentanten besitzen, ein Ideal ${}_l\mathfrak{A}_k^{p^e}$. Wir wollen uns Repräsentantensysteme dieser Ideale aufsuchen.

Hilfssatz 9: Man erhält ein genaues und gradtreues Repräsentantensystem für das Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$ aus $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^e}$, wenn man in

$$h(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{i}} b_{\mathfrak{i}}\, p^{\,e - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) - 1}\, r_{i_1}(x_1) \ldots r_{i_k}(x_k) \tag{8}$$

— $\mathfrak{i}$ bedeutet dabei alle jene k-dimensionalen ganzzahligen Vektoren $\mathfrak{i} \geqq \mathfrak{o}$, deren Komponenten die Bedingung $\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) < e$ erfüllen — jedes der $b_{\mathfrak{i}}$ die Werte $0, 1 \ldots p-1$ durchlaufen läßt.

Der Beweis ist dem des entsprechenden Hilfssatzes 6 in [1] nachgebildet. Zunächst erkennt man durch Anwendung von Hilfssatz 4 auf Restpolynome mod p^{e-1} und durch Verwendung der Tatsache, daß

$$p^{\,e - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu)}\, r_{i_1}(x_1) \ldots r_{i_k}(x_k)$$

Restpolynom mod p^e ist, daß jedes Element von $\mathfrak{A}^{p^e}$ einen Repräsentanten der Gestalt (8) besitzt und nach § 6, Zusatz a, sind alle Polynome (8) Repräsentanten von Elementen aus $\mathfrak{A}^{p^e}$. Wäre die Differenz $d(\mathfrak{x})$ zweier verschiedener Polynome (8) Restpolynom mod p^e und gegeben durch:

$$d(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{i}} d_{\mathfrak{i}}\, p^{\,e - \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) - 1}\, r_{i_1}(x_1) \ldots r_{i_k}(x_k) \tag{9}$$

so könnten wir uns hier die nicht verschwindenden Summanden für die Indexanordnung $i_1, i_2 \ldots i_k$ lexikographisch nach abnehmenden Indizes geordnet denken, wobei

$$d_j\, p^{\,e-\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon(j_\nu)-1}\, r_{j_1}(x_1)\,\ldots\, r_{j_k}(x_k)$$

der lexikographisch erste Summand sei. Es ist dann ersichtlich

$$d_j\, p^{\,e-\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon(j_\nu)-1}\, x_1^{j_1}\,\ldots\, x_k^{j_k}$$

das lexikographisch erste Glied des ausmultiplizierten und für die Anordnung $x_1, x_2 \ldots x_k$ lexikographisch geordneten Polynomes (9), es muß daher nach Hilfssatz 5 gelten: $d_j \equiv 0 \bmod p$, was durch die Entstehung von (9) unmöglich gemacht wird. Daß schließlich jedes der Polynome (8) gradtreuer Repräsentant seiner Restklasse ist, sieht man anders wie in [1], am besten folgendermaßen: Gäbe es ein $\bar{h}(\mathfrak{x})$ in der Restklasse des Polynomes $h(\mathfrak{x})$ von (8) mit $[\bar{h}] < [h]$, so könnte ich mir mit dem zu Beginn dieses Beweises verwendeten Verfahren daraus ein Polynom $\bar{\bar{h}}(\mathfrak{x})$ der Gestalt (8) mit $\bar{\bar{h}}(\mathfrak{x}) \equiv \bar{h}(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^e}$ herstellen und aus dem Zusatz b von § 6 folgt, daß $[\bar{\bar{h}}] \leqq [\bar{h}]$, also $[\bar{\bar{h}}] < [h]$ gelten würde, was nach dem soeben bewiesenen nicht möglich ist.

So wie in [1] brauchen wir für $\mathfrak{P}^{p^2}$ ein Repräsentantensystem von anderer Gestalt. Wir definieren zunächst: Ein ganzzahliges Polynom $f(\mathfrak{x})$ hat Normalform mod p, wenn es in jeder Unbestimmten einen Grad kleiner als p hat und für jeden seiner Koeffizienten u gilt: $0 \leqq u < p$, und sprechen folgenden Satz aus:

Hilfssatz 10: Man erhält ein genaues, gradtreues Repräsentantensystem für das Ideal $\mathfrak{P}^{p^2}$ aus $\Gamma[\mathfrak{x}] \mid A^{p^2}$ auch, wenn man in

$$h(\mathfrak{x}) = \mathfrak{s}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) + p\, t(\mathfrak{x}) \tag{10}$$

das $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ alle k-dimensionalen Polynomvektoren aus Polynomen der Normalform mod p und das $t(\mathfrak{x})$ alle Polynome der Normalform mod p durchlaufen läßt.

Beweis: Analog wie beim Beweis von Hilfssatz 7 in [1] überlegt man sich zunächst, daß es, wenn $f(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p ist, stets ein Polynom $h(\mathfrak{x})$ aus (10) mit $h(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^2}$ gibt. Dazu benützt man die nach Hilfssatz 6 mögliche Darstellung von $f(\mathfrak{x})$ in der Form:

$$f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) + p\, h(\mathfrak{x})$$

Ersetzt man darin nun die Komponenten von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ und das $h(\mathfrak{x})$ sämtlich durch Repräsentanten ihrer Restklassen nach A^p, welche Normalform mod p haben, so erhält man tatsächlich ein $h(\mathfrak{x})$, wie man es haben will.

Wie bereits in § 7 bemerkt, ist tatsächlich jedes der Polynome (10) ein Restpolynom mod p. Wäre die Differenz zweier Polynome (10), welche gegeben sei durch

$$d(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\, v(\mathfrak{x})$$

Restpolynom mod p^2, und wäre $u_j(\mathfrak{x})$ die erste nichtverschwindende Komponente von $\mathfrak{u}(\mathfrak{x})$, so könnte man $u_j(\mathfrak{x})$ für die Anordnung $x_j, x_1, x_2 \ldots$ der Unbestimmten lexikographisch ordnen. Wäre dabei $c\, x_j^{a_j}\, x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k}$ das lexikographisch erste Glied, so wäre offenkundig das lexikographisch erste Glied von $d(\mathfrak{x})$ für diese Anordnung der Unbestimmten gegeben durch $c\, x_j^{a_j+p}\, x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k}$, nach Hilfssatz 5 müßte also gelten $c \equiv 0 \bmod p$, was mit der Entstehung von c nicht vereinbar ist. Daher gilt $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$, also muß $v(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p sein und die beiden Polynome (10) stimmen in $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ und $t(\mathfrak{x})$ überein. Gäbe es schließlich zu einem Polynom $h(\mathfrak{x})$ von (10) ein $\bar{h}(\mathfrak{x})$ mit $[\bar{h}] < [h]$ und $\bar{h}(\mathfrak{x}) \equiv h(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^2}$, so hätte ich nach Hilfssatz 6

$$\bar{h}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\, h(\mathfrak{x})$$

Hierin ersetze ich nun die Komponenten $\mathfrak{g}_\nu(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ und das $h(\mathfrak{x})$ wie oben durch Repräsentanten ihrer Restklassen nach A^p, welche Normalform mod p haben, und erhalte so ein $\bar{\bar{h}}(\mathfrak{x}) \equiv h(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^2}$. Beachtet man nun die in Hilfssatz 6 enthaltene Aussage über die Grade der $g_\nu(\mathfrak{x})$ und des $h(\mathfrak{x})$ und bedenkt man weiter, daß ein Polynom der Normalform mod p stets gradtreuer Repräsentant seiner Restklasse nach A^p ist, so erkennt man, daß $[\bar{\bar{h}}] \leqq [\bar{h}]$. Nun sind aber $\bar{h}(\mathfrak{x})$ und $\bar{\bar{h}}(\mathfrak{x})$ beide von der Gestalt (10), aber wegen $[\bar{\bar{h}}] < [h]$ nicht identisch, was nach dem vorhergehenden Teil dieses Beweises nicht möglich ist.

Schließlich benötigen wir noch folgenden

Hilfssatz 11: Man erhält ein genaues, gradtreues Repräsentantensystem für das Ideal ${}_l\mathfrak{A}_k^{p^e}$ aus $\Gamma_k \mid A_k^{p^e}$, wenn man in dem Polynomvektor

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = (0, 0 \ldots 0, r_1(\mathfrak{x}) \ldots r_{k-l}(\mathfrak{x}))$$

jedes der $r_\nu(\mathfrak{x})$ ein genaues, gradtreues Repräsentantensystem des Ideales $\mathfrak{A}^{p^e}$ durchlaufen läßt.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist auf Grund der Definition von $\mathfrak{A}^{p^e}$ leicht einzusehen.

§ 10. Wir betrachten nun zunächst die Struktur von ${}_l\mathfrak{G}_p^k$, wo p eine Primzahl ist, und beweisen folgenden

Satz V: Die Gruppe ${}_l\mathfrak{G}_p^k$ ist isomorph zum direkten Produkt von p^l Exemplaren der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^{k-l}}$.

Beweis: Wir betrachten die nach § 1 zu ${}_l\mathfrak{G}_p^k$ isomorphe Permutationsgruppe $\mathfrak{L}$ der Vektoren des Vektorraumes V_p, die aus den von den Elementen der Gruppe erzeugten Abbildungen von V_p auf sich besteht. Jede Permutation σ dieser Gruppe hat die Eigenschaft, jeden Vektor $(u_1, u_2 \ldots u_l, u_{l+1} \ldots u_k)$ überzuführen in einen Vektor $(u_1, u_2 \ldots \ldots u_l, v_{l+1} \ldots v_k)$, wie aus der Defination von ${}_l\mathfrak{G}_p^k$ hervorgeht; wir drücken dies aus durch die Beziehung:

$$\sigma \mid (\mathfrak{u}_l, \mathfrak{u}_{k-l}) = (\mathfrak{u}_l, \sigma(\mathfrak{u}_l) \mid \mathfrak{u}_{k-l}) \tag{11}$$

Durchläuft bei festem $\mathfrak{u}_l$ das $\mathfrak{u}_{k-l}$ sämtliche p^{k-l} Vektoren der Dimension $k-l$ über Π, dann durchläft auch $\sigma(\mathfrak{u}_l) \mid \mathfrak{u}_{k-l}$ alle diese Vektoren, sonst wäre σ keine Permutation. Daher bedeutet $\sigma(\mathfrak{u}_l)$ selbst eine Permutation von p^{k-l} Elementen, und da es p^l Vektoren $\mathfrak{u}_l$ gibt, ist jedem σ eindeutig ein p^l-Tupel $\{\sigma(\mathfrak{u}_l)\}$ von solchen Permutationen zugeordnet. Ist umgekehrt ein derartiges p^l-Tupel, bestehend aus beliebigen Permutationen $\sigma(\mathfrak{u}_l)$, vorgegeben, so wird durch (11) ein σ definiert, das zu $\mathfrak{L}$ gehört, wie man leicht erkennt, wenn man Hilfssatz 8 beachtet, und dieses σ ist auch eindeutig bestimmt. Ist schließlich ϱ eine zweite Permutation von $\mathfrak{L}$, so gilt:

$$\varrho\,\sigma \mid (\mathfrak{u}_l, \mathfrak{u}_{k-l}) = \varrho \mid (\mathfrak{u}_l, \sigma(\mathfrak{u}_l) \mid \mathfrak{u}_{k-l}) = (\mathfrak{u}_l, \varrho(\mathfrak{u}_l)\,\sigma(\mathfrak{u}_l) \mid \mathfrak{u}_{k-l})$$

daher ist dem $\varrho\,\sigma$ das p^l-Tupel $\{\varrho(\mathfrak{u}_l)\,\sigma(\mathfrak{u}_l)\}$ zugeordnet.

§ 11. Nun beweisen wir folgenden

Satz VI: Die Gruppe ${}_l\mathfrak{G}_{p^e-1}^k$ ist stets homorphes Bild der Gruppe ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$.

Beweis: Wir ordnen dem Element $F \in {}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$ das durch die Repräsentanten dieses Elementes repräsentierte Element $\overline{F} \in {}_l\mathfrak{G}_{p^e-1}^k$ zu. Daß $\overline{F}$ tatsächlich ein Element von ${}_l\mathfrak{G}_{p^e-1}^k$ ist, folgt aus Hilfssatz 2a und der Definition von ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$, und es ist klar, daß $\overline{F}$ eindeutig bestimmt ist. Wird F repräsentiert durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, G durch $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$, so wird FG repräsentiert durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$, dieser Vektor repräsentiert also auch $\overline{F}\overline{G}$, aber ersichtlich auch $\overline{FG}$. Ist schließlich $\overline{F} \in {}_l\mathfrak{G}_{p^e-1}^k$ vorgegeben und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein Normalrepräsentant dieses Elementes, so repräsentiert im Falle $e > 2$ nach Hilfssatz 2a das $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ auch ein Element von ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$, welches $\overline{F}$ zum Bild hat. Für $e = 2$ ist dieser Schluß aber nicht anwendbar; wir können in diesem Fall vorläufig nur sagen, daß die soeben konstruierte Abbildung eine Homomorphie Ω von ${}_l\mathfrak{G}_{p^2}^k$ in ${}_l\mathfrak{G}_p^k$ ergibt. Um aber Satz VI auch für diesen Fall vollständig zu beweisen, verifizieren wir zunächst folgenden

Satz VII: Man erhält ein genaues, gradtreues Normalrepräsentantensystem der Elemente von ${}_{l}\mathfrak{G}^{k}_{p^s}$, *die bei der Homomorphie* Ω *von* ${}_{l}\mathfrak{G}^{k}_{p^s}$ *in* ${}_{l}\mathfrak{G}^{k}_{p}$ *auf das feste Element* $G \in {}_{l}\mathfrak{G}^{k}_{p}$ *abgebildet werden, wenn man mit einem gradtreuen Normalrepräsentanten* $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ *von* G *folgende Polynomvektoren (geschrieben als Spalten) bildet:*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \tag{12}$$

Darin durchläuft $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *alle Vektoren der Gestalt*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (0, 0 \ldots 0, w_{l+1}(\mathfrak{x}) \ldots w_k(\mathfrak{x})) \text{ alle } w_\nu(\mathfrak{x}) \text{ Normalform mod } p \tag{13}$$

und $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ *alle k-zeiligen quadratischen Matrizen, welche folgende Gestalt haben:*

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{x}) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ u_{l+1,1}(\mathfrak{x}) & \ldots & u_{l+1,k}(\mathfrak{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{k,1}(\mathfrak{x}) & \ldots & u_{k,k}(\mathfrak{x}) \end{array} \right\} \text{alle } u_{ik}(\mathfrak{x}) \text{ Normalform mod } p \tag{14}$$

und folgende Determinantenbedingung erfüllen:

$$\Theta(\mathfrak{x}) - \mathfrak{T}(\mathfrak{x}) \mid \not\equiv 0 \bmod p \text{ für jeden ganzzahligen Vektor } \mathfrak{x}, \tag{15}$$

wenn wir mit $\Theta(\mathfrak{x})$ *ähnlich wie in* § 5 *die aus den Spaltenvektoren* $\dfrac{\partial\,\mathfrak{g}}{\partial\,x_\nu}$ *gebildete Matrix bezeichnen.*

Beweis: Hat zunächst $H \in {}_{l}\mathfrak{G}^{k}_{p^s}$ das G als Bild und $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ als Normalrepräsentanten, so ist $\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ Repräsentant eines Elementes aus ${}_{l}\mathfrak{A}^{p^s}_{k}$. Nach Hilfssatz 11 und Hilfssatz 10 gilt für das als Spalte geschriebene $\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{T}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^s}_{k}$$

also

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^s}_{k} \tag{16}$$

und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ist hierin von der Gestalt (13), $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ von der Gestalt (14). Da $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ ein vollständiges Vektorsystem mod p^2 erzeugt, erzeugt auch der auf der rechten Seite von (16) stehende Polynomvektor $\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ ein solches, erfüllt daher die Bedingungen von Hilfssatz 2, insbesondere also auch: $D\,\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) \not\equiv 0$ mod p für jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{x}$. Nun ist aber $D\,\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ die Determinante der aus den Spaltenvektoren $\dfrac{\partial\,\bar{\mathfrak{h}}}{\partial\,x_\nu}$ gebildeten Matrix; da wir nun $\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ auch folgendermaßen schreiben können:

$$\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) + \sum_{i=1}^{k} (x_i^p - x_i)\, \mathfrak{l}_i(\mathfrak{x}) + p\, \mathfrak{f}(\mathfrak{x})$$

wo $\mathfrak{l}_i(\mathfrak{x})$ die Spaltenvektoren von $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ sind, gilt

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{h}}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu} + \sum_{i=1}^{k} (x_i^p - x_i) \frac{\partial \mathfrak{l}_i}{\partial x_\nu} + (p\, x_\nu^{p-1} - 1)\, \mathfrak{l}_\nu(\mathfrak{x}) + p \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x_\nu}$$

also

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{h}}}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu} - \mathfrak{l}_\nu(\mathfrak{x}) \bmod A_k^p$$

Daraus folgt, daß gilt:

$$D\,\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) = \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu} - \mathfrak{l}_\nu(\mathfrak{x})\right) \right| \bmod p \text{ für jeden ganzzahligen Vektor } \mathfrak{x}, \quad (17)$$

wobei der rechtsstehende Ausdruck die Determinante der aus den Spaltenvektoren $\dfrac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu} - \mathfrak{l}_\nu(\mathfrak{x})$ gebildeten Matrix bedeutet, also die Determinante der Matrix $\Theta(\mathfrak{x}) - \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$, weshalb $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ auch die Bedingung (15) erfüllt.

Zweitens ist jeder Polynomvektor (12) Normalrepräsentant eines Elementes von ${}_l\mathfrak{G}_{p^2}^k$ mit G als Bild, wie man aus Hilfssatz 2 bei Beachtung von (17) leicht erkennt. Würden drittens zwei Polynomvektoren (12) das selbe Element von ${}_l\mathfrak{G}_{p^2}^k$ repräsentieren, so würden für jedes r ihre r-ten Komponenten zur selben Restklasse nach A^{p^2} gehören. Erinnert man sich nun an Hilfssatz 10, so erkennt man, daß beide Polynomvektoren sowohl in $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$, als auch in $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ übereinstimmen. Gäbe es schließlich zu einem $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von (12) einen Polynomvektor $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ mit $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \bmod A_k^{p^2}$ und[11] $[\bar{\mathfrak{f}}] < [\mathfrak{f}]$, so gäbe es mindestens eine Komponente $f(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, zu der ein Polynom $\bar{f}(\mathfrak{x})$ mit $\bar{f}(\mathfrak{x}) \equiv f(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^2}$ und $[\bar{f}] < [f]$ vorhanden ist. Es wäre also nach (12)

$$\bar{f}(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x}) + \mathfrak{t}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\, s(\mathfrak{x}) \qquad \bmod A^{p^2}$$

Da nun $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ nach Voraussetzung gradtreuer Repräsentant von G ist, gilt wegen $\bar{f}(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x}) \bmod A^p$ die Beziehung $[g] \leqq [\bar{f}]$, also $[g] < [f]$, daher $[f - g] = [f]$, jedoch $[\bar{f} - g] < [f]$, gleichzeitig aber auch

$$\bar{f}(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x}) \equiv f(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x}) \bmod A^{p^2}$$

[11] $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ soll heißen $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, wobei aber mindestens für eine Komponente gilt $a_i < b_i$.

Nun hat aber $f(\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x})$ ersichtlich die Gestalt (10) und ist nach Hilfssatz 10 daher gradtreu, weshalb unsere Annahme nicht möglich ist.

Wir wollen nun noch die Anzahl der Polynomvektoren (12) abzählen und erinnern uns zunächst daran, daß es insgesamt p^{p^k} Polynome der Normalform mod p gibt, so daß wir für $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ genau $p^{(k-l)\,p^k}$ Möglichkeiten haben. Die Anzahl der Möglichkeiten für $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ aber erhalten wir folgendermaßen: Wir fassen $\Theta(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ als Matrizes über dem Polynomring $\Pi[\mathfrak{x}]$ auf. Man erkennt leicht, daß gilt:

$$|\Theta(\mathfrak{x}) - \mathfrak{T}(\mathfrak{x})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{l+1}}{\partial x_{l+1}} - u_{l+1,\,l+1} & \cdots & \frac{\partial g_{l+1}}{\partial x_k} - u_{l+1,\,k} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{l+1}} - u_{k,\,l+1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} - u_{k,\,k} \end{vmatrix} = |\overline{\Theta}(\mathfrak{x}) - \overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})|$$

wenn man mit $\overline{\Theta}(\mathfrak{x})$ bzw. $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})$ die entsprechenden Teilmatrizes von $\Theta(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ bezeichnet. Daraus erkennt man zunächst, daß in (14) alle $u_{ij}(\mathfrak{x})$ mit $l+1 \leqq i \leqq k$ und $1 \leqq j \leqq l$ — solche gibt es $l(k-l)$ — keinerlei Einfluß auf die Gültigkeit von (15) haben. Wir brauchen also bloß abzuzählen, wieviel Matrizes $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})$ aus Polynomen der Normalform über $\Pi[\mathfrak{x}]$ es gibt, welche für alle Vektoren $\mathfrak{x}$ über Π folgende Bedingung erfüllen:

$$|\overline{\Theta}(\mathfrak{x}) - \overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})| \neq 0 \tag{18}$$

Dazu betrachten wir den Ring $\mathfrak{M}$ aller $k-l$ zeiligen quadratischen Matrizen über $\Pi[\mathfrak{x}]$ und bezeichnen darin mit $\mathfrak{N}$ das Ideal der Matrizen, deren Elemente alle für jeden Vektor $\mathfrak{x}$ über Π verschwinden. Ersichtlich erhält man ein genaues Repräsentantensystem für $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, wenn man alle Matrizen aus Polynomen der Normalform über Π bildet. Weiter erkennt man leicht, daß die Elemente von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ und die Gesamtheit der eindeutigen Abbildungen

$$\mathfrak{a} \to \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \tag{19}$$

des Vektorenraumes über Π auf den Ring aller $k-l$ zeiligen Matrizen über Π eineindeutig aufeinander bezogen werden, wenn man jedem Element von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ die von seinen Matrizen erzeugte Abbildung zuordnet (man beachte Hilfssatz 8). In $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Teilmenge der Elemente, deren zugeordnete Abbildung (19) die Bedingung $|\mathfrak{P}(\mathfrak{a})| \neq 0$ für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ erfüllt, mit $\mathfrak{Q}$ und bilden uns mit einem genauen

Repräsentantensystem $T(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{Q}$ die Gesamtheit der Matrizen $\overline{\Theta}(\mathfrak{x}) - T(\mathfrak{x})$. Ist nun $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})$ eine der zu zählenden Matrizen, so gibt es ersichtlich genau ein $T(\mathfrak{x})$ mit

$$\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x}) \equiv \overline{\Theta}(\mathfrak{x}) - T(\mathfrak{x}) \bmod \mathfrak{N} \tag{20}$$

Umgekehrt gibt es zu jedem $T(\mathfrak{x})$ tatsächlich genau ein $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{x})$ aus Polynomen der Normalform, welches (20) und (18) erfüllt, so daß die Anzahl der $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ also genau so groß ist wie die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{Q}$. Diese Anzahl ergibt sich aber aus der Definition von $\mathfrak{Q}$ mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 unschwer zu $[\varphi_{k-l}(p)]^{p^k}$, so daß wir als Gesamtzahl der Polynomvektoren (12) erhalten:

$$p^{(k-l)\,p^k}\, p^{p^k\,l(k-l)}\, [\varphi_{k-l}(p)]^{p^k} = [p^{(k-l)(l+1)}\, \varphi_{k-l}(p)]^{p^k}$$

da dieser Ausdruck nicht verschwindet, ist damit Satz VI endgültig bewiesen. Zusammen mit Satz V erhalten wir nun sogleich

Satz VIII: Die Ordnung von ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ ist gegeben durch

$$o({}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}) = (p^{k-l}!)^{p^l}\, [\varphi_{k-l}(p)]^{p^k}\, p^{(k-l)(l+1)\,p^k} = [o({}_0\mathfrak{G}^{k-l}_{p^e})]^{p^l}\, p^{(k-l)\,l\,p^k}$$

§ 12. Wir beschäftigen uns nun mit der Gradverteilung in ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ für $e > 2$ und beweisen zunächst:

Satz IX: Man erhält, falls $e > 2$ ist, ein genaues, gradtreues Normalrepräsentantensystem der Elemente $F \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$, für die $[F] \leqq \mathfrak{s}$ gilt, wenn man in

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{h}(\mathfrak{x}) \tag{21}$$

das $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein genaues, gradtreues Normalrepräsentantensystem aller $G \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^e-1}$ mit $[G] \leqq \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ ein genaues, gradtreues Repräsentantensystem aller $H \in {}_l\mathfrak{A}^{p^e}_k$ mit $[H] \leqq \mathfrak{s}$ — dabei bedeutet $[H]$ natürlich den abgekürzten Gradvektor von H — durchlaufen läßt.

Der Beweis verläuft wie der von Satz IX in [1] und wird daher nur kurz skizziert: Zunächst ist wirklich jeder Polynomvektor (21) Normalrepräsentant eines Elementes F von ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ mit $[F] \leqq \mathfrak{s}$. Man kann sich ähnlich wie in [1] überlegen, daß jedes $F \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ mit $[F] \leqq \mathfrak{s}$ in (21) vertreten wird. Daß zwei Polynomvektoren (21) nur dann das selbe Element aus ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ repräsentieren, wenn sie in $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ übereinstimmen, sieht man genau so wie in [1]. Wäre schließlich einer der Polynomvektoren (21) noch nicht gradtreuer Repräsentant seiner Restklasse, so würde mindestens eine seiner $k - l$ letzten Komponenten nicht gradtreue Vertreterin ihrer Restklasse nach A^{p^e} sein. Die Unmöglichkeit dieser Annahme erkennt man genau so wie in [1].

Satz IX ermöglicht uns, die Berechnung der Gradverteilung in ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ auf die der Gradverteilung in ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^{e-1}}$ zurückzuführen. Man muß dazu allerdings auch die Anzahl $K(\mathfrak{s})$ der $H \in {}_l\mathfrak{A}^{p^e}_k$ mit $[H] \leqq \mathfrak{s}$ kennen und wir wollen uns zunächst kurz damit beschäftigen. Dazu erinnern wir uns an Hilfssatz 11 und entnehmen daraus: Bezeichnet man mit $U^k_e(s)$ die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{A}^{p^e}$ mit einem Grad $\leqq s$ und bezeichnen wir mit s_ν die Komponenten von $\mathfrak{s}$, so gilt:

$$K(\mathfrak{s}) = \prod_{\nu=1}^{k-l} U^k_e(s_\nu)$$

Zur Berechnung von $U^k_e(s)$ müssen wir Hilfssatz 9 heranziehen und außerdem noch den Zusatz b von § 6 beachten. Daraus erkennen wir, daß $U^k_e(s)$ folgende Beziehung erfüllt:

$$U^k_e(s) = p^{\eta^k_e(s)}$$

wenn mit $\eta^k_e(s)$ die Anzahl der Lösungen folgenden Ungleichungssystemes:

$$\sum_{\nu=1}^{k} i_\nu \leqq s \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(i_\nu) < e \tag{22}$$

in nichtnegativen, ganzen Zahlen bezeichnet wird.

Wir erhalten damit folgenden

Satz X: Falls $e > 2$ ist, gilt ${}_lE^k_{p^e}(\mathfrak{s}) = {}_lE^k_{p^{e-1}}(\mathfrak{s})\; p^{\sum_{\nu=1}^{k-l} \eta^k_e(s_\nu)}$

Die Berechnung von $\eta^k_e(s)$ kann auf rekursivem Weg erfolgen, es gilt nämlich

Hilfssatz 12: Die Funktion $\eta^k_e(s)$ genügt folgender Rekursionsformel:

$$\eta^k_e(s) = \sum_{\mu=0}^{a} \eta^{k-1}_{e-\varepsilon(\mu)}(s - \mu) \qquad a = min(s, r(e)) \tag{23}$$

wo $r(e)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen i mit $\varepsilon(i) < e$ bedeutet.

Beweis: Bei jeder Lösung von (22) ist $i_k \leqq s$ und $\varepsilon(i_k) < e$, daher $0 \leqq i_k \leqq \min(s, r(e))$. Wir ordnen sämtliche Lösungen von (22) nach dem Wert ihres i_k. Die Zahl der Lösungen mit $i_k = \mu$ ist aber gerade gleich der Lösungszahl von

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} i_\nu \leqq s - \mu \qquad \sum_{\nu=1}^{k-1} \varepsilon(i_\nu) < e - \varepsilon(\mu)$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir können nun auch die Ordnung von ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ leicht durch die Ordnung von ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^{e-1}}$ ausdrücken. Bedenken wir nämlich, daß ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ und ${}_l\mathfrak{A}^{p^e}_k$ nur endlich viele Elemente haben, da beides Teilmengen von $\Gamma_k \mid A^{p^e}_k$ sind, so erkennen wir, daß es ein t gibt, so daß für alle $F \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}$ gilt: $[F] \leqq t$ und für alle $H \in {}_l\mathfrak{A}^{p^e}_k$ gilt $[H] \leqq t$, und sehen unschwer, daß Satz IX richtig bleibt, wenn wir darin die Gradbeschränkungen alle weglassen.

Wenn wir unsere oben verwendete Bezeichnung sinngemäß erweitern, so erhalten wir nun für die Elementezahl von ${}_l\mathfrak{A}^{p^e}_k$ den Ausdruck $p^{(k-l)\,\eta^k_e(\infty)}$; wir überlegen uns leicht, daß $\eta^k_e(\infty)$ folgender Rekursionsformel genügt:

$$\eta^k_e(\infty) = \sum_{\mu=0}^{r(e)} \eta^{k-1}_{e-\varepsilon(\mu)}(\infty)$$

Bezeichnen wir die Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ allgemein mit $o(\mathfrak{G})$, so erhalten wir damit

Satz XI: Falls $e > 2$ ist, gilt $o({}_l\mathfrak{G}^k_{p^e}) = o({}_l\mathfrak{G}^k_{p^{e-1}})\, p^{(k-l)\,\eta^k_e(\infty)}$

§ 13. Nun stellen wir noch einige Überlegungen über die Gradverteilung in ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^s}$ an. Dabei gehen wir ähnlich vor, wie in [1].

Bezeichnen wir die Anzahl der $F \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^s}$ mit $[F] \leqq t$, die bei der homomorphen Abbildung ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^s} \to {}_l\mathfrak{G}^k_p$ auf ein bestimmtes Element G abgebildet werden, mit $L(t, G)$, so gilt ersichtlich:

$${}_lE^k_{p^s}(t) = \sum_G L(t, G) \tag{24}$$

wenn die rechtsstehende Summe über die ganze Gruppe ${}_lG^k_p$ erstreckt wird.

Nun erinnern wir uns an Satz VII und benützen ihn zu Untersuchungen über $L(t, G)$. Zunächst definieren wir aber: Unter dem abgekürzten Gradvektor einer Matrix der Gestalt (14) verstehen wir den Vektor, dessen ν-te Komponente gegeben ist durch den größten unter den Graden der Polynome in der $l + \nu$-ten Zeile von (14) für $\nu = 1, 2 \ldots k - l$. Dann beweisen wir folgenden

Hilfssatz 13: Wird $F \in {}_l\mathfrak{G}^k_{p^s}$ mit $G \in {}_l\mathfrak{G}^k_p$ als Bild durch den Polynomvektor (12) *vertreten, so daß also die bei* (12) *verlangten Bedingungen wirklich erfüllt sind, so gilt*

$$[F] = max\,([G], [\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}]) \tag{25}$$

wenn mit $\mathfrak{p}$ der Vektor bezeichnet wird, dessen $k - l$ Komponenten den

Wert p haben, und jede Komponente $-1 + p$ in $[\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}$ gleich -1 gesetzt wird.

Zum Beweis genügt es, zu zeigen, daß für $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ aus (12) gilt:

$$[\mathfrak{f}] = \max([\mathfrak{g}], [\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}])$$

denn $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ sind ja gradtreue Repräsentanten ihrer Elemente.

Es gilt nun zunächst ersichtlich: $[\mathfrak{f}] \leqq \max([\mathfrak{g}], [\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}])$. Es gilt aber auch $[\mathfrak{f}] \geqq \max([\mathfrak{g}], [\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}])$; denn da $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ gradtreuer Repräsentant von G ist, gilt $[\mathfrak{f}] \geqq [\mathfrak{g}]$. Eine Einzelzeile von (12) sei gegeben durch

$$f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) + t(\mathfrak{x})\, o(\mathfrak{x}) + p\, s(\mathfrak{x})$$

$t(\mathfrak{x})$ sei eine Komponente größten Grades aus $t(\mathfrak{x})$. Würde nun gelten

$$[f] < \max([t] + p, [s]) \tag{26}$$

so wäre wegen $[\mathfrak{g}] \leqq [\mathfrak{f}]$ auch $[g] < \max([t]+p, [s])$. Es würde (26) daher bedeuten, daß sich beim Ausmultiplizieren und Zusammenfassen des Ausdruckes

$$t(\mathfrak{x})\, o(\mathfrak{x}) + p\, s(\mathfrak{x})$$

die Glieder mit höchstem Grad gegeneinander aufheben. Dies ist aber unmöglich; man sieht das leicht, wenn man die Fälle $[s] > [t] + p$, $[s] < [t] + p$ und $[s] = [t] + p$ der Reihe nach betrachtet und bedenkt, daß $s(\mathfrak{x})$ und die Komponenten von $t(\mathfrak{x})$ Normalform mod p haben; außerdem muß man noch beachten, daß $[t] = -1$ gleichbedeutend mit $t(\mathfrak{x}) = o$ ist. Es gilt also $[\mathfrak{f}] \geqq \max([\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}])$, woraus die Behauptung folgt.

Um nun $L(\mathfrak{t}, G)$ zu erhalten, brauchen wir bloß festzustellen, für wieviele Zusammensetzungen der in Satz VII zugelassenen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{f}$ die Bedingung

$$\max([G], [\mathfrak{T}] + \mathfrak{p}, [\mathfrak{f}]) \leqq \mathfrak{t} \tag{27}$$

erfüllt ist. Es ist nun (27) gleichbedeutend mit folgendem System von Ungleichungen:

$$[G] \leqq \mathfrak{t},\ [\mathfrak{T}] \leqq \mathfrak{t} - \mathfrak{p},\ [\mathfrak{f}] \leqq \mathfrak{t} \tag{28}$$

wobei man in $\mathfrak{t} - \mathfrak{p}$ jede negative Komponente gleich -1 zu setzen hat, wie man sich leicht überlegt. Daraus erkennt man, daß gilt $L(\mathfrak{t}, G) = 0$ für $[G] \lneqq \mathfrak{t}$.

Wir bezeichnen nun ähnlich wie in [1] die Anzahl der Matrizes $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ mit $[\mathfrak{T}] \leqq \mathfrak{r}$, welche die Bedingungen von Satz VII erfüllen, mit ${}_tZ^k(\mathfrak{r}, \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$. Diese Verteilungsfunktion ist also erklärt für alle Vektoren

mit $k - l$ ganzzahligen Komponenten $r_i \geqq -1$. Dann haben wir für $\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ insgesamt ${}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ Möglichkeiten, für welche (28) erfüllt ist. Weiter bezeichnen wir mit $w_k(t)$ die Anzahl der Polynome der Normalform mod p in k Unbestimmten, deren Grad höchstens t beträgt, so daß sich, wenn t_ν die Komponenten von $\mathfrak{t}$ sind, für $\mathfrak{f}$ insgesamt $\prod_{\nu=1}^{k-l} w_k(t_\nu)$ Möglichkeiten in (28) ergeben, und so erhalten wir

$$L(\mathfrak{t}, G) = {}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, \mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \prod_{\nu=1}^{k-l} w_k(\mathfrak{t}_\nu) \quad \text{für } [G] \leqq \mathfrak{t} \tag{29}$$

Bevor wir diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, bemerken wir kurz folgendes: Nach Definition von ${}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ geht darin auch die Wahl des gradtreuen Repräsentanten $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ für G ein. Da jedoch $L(\mathfrak{t}, G)$ und $\prod_{\nu=1}^{k-l} w_k(t_\nu)$ nur von G und $\mathfrak{t}$ abhängen, ist auch ${}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ tatsächlich nicht von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$, sondern nur von G abhängig, so daß wir ${}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, G)$ dafür schreiben können.

Wir wollen uns kurz mit der Berechnung von $w_k(t)$ befassen: Da der Grad jeden Gliedes eines Polynomes der Normalform mod p sich als eine Summe $\sum_{\nu=1}^{k} u_\nu$ mit $0 \leqq u_\nu < p$ ergibt und jeder Koeffizient eines solchen Polynomes $0 \leqq c < p$ erfüllt, gilt offenkundig:

$$w_k(t) = p^{v_k(t)} \tag{30}$$

wo $v_k(t)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$\sum_{\nu=1}^{k} u_\nu \leqq t \quad \text{mit } 0 \leqq u_\nu < p \text{ für jedes } \nu$$

bedeutet. Genau wie den Hilfssatz 12 beweist man folgenden

Hilfssatz 14: *Die Funktion $v_k(t)$ genügt der Rekursionsformel*

$$v_k(t) = \sum_{\mu=0}^{q} v_{k-1}(t - \mu) \qquad q = min(p - 1, t)$$

die für alle $t \geqq 0$ gültig ist.

Setzen wir aus (30) in (29) ein, so erhalten wir

Satz XII: Die Verteilungsfunktion $L(\mathfrak{t}, G)$ erfüllt folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L(\mathfrak{t}, G) &= 0 && \text{für } [\mathfrak{G}] \nleqq \mathfrak{t} \\ L(\mathfrak{t}, G) &= {}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, G)\, p^{\sum_{\nu=1}^{k-l} v_k(t_\nu)} && \text{für } [\mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{t} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die Formeln (31) und (24) ermöglichen uns ähnlich wie in [1] eine Abschätzung von ${}_lE^k_{p^s}(\mathfrak{t})$. Da müssen wir zunächst eine Schranke für ${}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, G)$ aufsuchen:

$$ {}_lZ^k(\mathfrak{t} - \mathfrak{p}, G) \leqq \prod_{\nu=1}^{k-l} [w_k(t_\nu - p)]^k = p^{\sum_{\nu=1}^{k-l} k\, v_k(t_\nu - p)} $$

wobei wie bisher negative $t_\nu - p$ gleich -1 zu setzen sind. Durch Einsetzen in (31) und (24) erhält man

$$ {}_lE^k_{p^s}(\mathfrak{t}) \leqq {}_lE^k_p(\mathfrak{t})\, p^{\sum_{\nu=1}^{k-l} [k\, v_k(t_\nu - p) + v_k(t_\nu)]} $$

§ 14. Während wir uns bisher vor allem mit der Gradverteilung in ${}_l\mathfrak{G}^k_n$ beschäftigt haben, wollen wir uns nun noch etwas mit natürlichen Untergruppen von ${}_l\mathfrak{G}^k_n$ befassen. Wie bereits in § 2 erwähnt, verstehen wir dabei unter einer natürlichen Untergruppe eine Untergruppe, deren Elemente sich sämtlich durch Polynomvektoren von bestimmter, gegebener Gestalt repräsentieren lassen.

Eine schon längst bekannte und oft (vor allem im Falle $l = 0$) betrachtete[12] Untergruppe von ${}_l\mathfrak{G}^k_n$ wird gebildet von allen Elementen F mit dem Gradvektor $[F] = (1, 1 \ldots 1)$. Wir wollen diese Gruppe — sie sei mit ${}_l\mathfrak{M}^k_n$ bezeichnet — mit unseren Methoden kurz etwas untersuchen.

Man erkennt unmittelbar, daß jedes Element $G \in_l \mathfrak{M}^k_n$ einen Repräsentantenvektor folgender Gestalt besitzt:

$$ \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = A\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{32} $$

wo A eine k-zeilige quadratische Matrix der Gestalt

$$ A = \begin{Bmatrix} E_l & \Omega \\ P & B_{k-l} \end{Bmatrix} \tag{33} $$

ist, wenn E_l eine l-zeilige Einheitsmatrix, B_{k-l} eine $(k-l)$-zeilige quadratische Matrix, Ω eine rechteckige Nullmatrix und P eine rechteckige Matrix bedeutet, und $\mathfrak{b}$ ein Vektor aus k Komponenten ist, dessen erste l Komponenten verschwinden. Da (32) ein volles Vektorsystem mod n erzeugen muß, gilt dabei, wie leicht zu sehen,

$$ (|A|, n) = (|B_{k-l}|, n) = 1 \tag{34} $$

Umgekehrt repräsentiert jeder Polynomvektor (32), dessen A die Bedingungen (33) und (34) erfüllt, ein Element G aus ${}_l\mathfrak{M}^k_n$. Denn ist p ein

[12] Wir erwähnen *Jordan*, a. a. O., S. 91ff.

Primteiler von n, so gilt wegen (34) auch $(|A|, p) = 1$, daher erzeugt $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p; weiter ist $D\,\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = |A|$, daher wird nach Hilfssatz 2 ein volles Vektorsystem mod p^k erzeugt und nach Hilfssatz 1 auch ein volles Vektorsystem mod n. Falls zwei Vektoren (32) das selbe Element von ${}_l\mathfrak{M}_n^k$ repräsentieren, ist ihre Differenz ein Vektor aus A_k^n. Setzt man in diese Differenz der Reihe nach die Vektoren $\mathfrak{o}$, $(1, 0 \ldots 0)$, $(0, 1, 0 \ldots 0)$ ... ein — was jedesmal mod n genommen den Nullvektor ergeben muß — so erkennt man, daß dann die beiden Vektoren in A und in $\mathfrak{b}$ mod n übereinstimmen müssen. Wir haben also, wenn wir uns an Hilfssatz 3 erinnern:

Satz XIII: Man erhält ein genaues und gradtreues Normalrepräsentantensystem für ${}_l\mathfrak{M}_n^k$, wenn man in

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = A\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

das A alle aus den Elementen eines vollen Restsystemes mod n zu bildenden Matrizen (33), *welche* (34) *erfüllen, durchlaufen läßt und das $\mathfrak{b}$ alle Vektoren aus diesem Restsystem von der oben angegebenen Gestalt. Die Ordnung von ${}_l\mathfrak{M}_n^k$ beträgt daher $\varphi_{k-l}(n)\, n^{(k-l)(l+1)}$.*

Betrachtet man die in § 4 für $n = ab$ mit $(a, b) = 1$ durchgeführte Zerlegung von ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ in ein direktes Produkt von zu ${}_l\mathfrak{G}_a^k$ und ${}_l\mathfrak{G}_b^k$ isomorphen Gruppen, so erkennt man unschwer, daß dabei ${}_l\mathfrak{M}_n^k$ in das direkte Produkt von zu ${}_l\mathfrak{M}_a^k$ und ${}_l\mathfrak{M}_b^k$ isomorphen Gruppen zerlegt wird, so daß gilt: $\varphi_{k-l}(ab) = \varphi_{k-l}(a)\,\varphi_{k-l}(b)$. Nun sehen wir uns die in § 11 durchgeführte homomorphe Abbildung von ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$ auf ${}_l\mathfrak{G}_{p^{e-1}}^k$ an und erkennen mittels Hilfssatz 2 sogleich, daß dabei ${}_l\mathfrak{M}_{p^e}^k$ homomorph auf ${}_l\mathfrak{M}_{p^{e-1}}^k$ abgebildet wird. Ist $\bar{A}\,\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{b}}$ Vertreter eines Elementes von ${}_l\mathfrak{M}_{p^{e-1}}^k$, so erhalten wir ein Repräsentantensystem der darauf abgebildeten Elemente von ${}_l\mathfrak{M}_{p^e}^k$, indem wir aus (32) alle Vektoren mit $A \equiv \bar{A}$ mod p^{e-1} und $\mathfrak{b} \equiv \bar{\mathfrak{b}}$ mod p^{e-1} heraussuchen. Die Anzahl dieser Elemente ergibt sich zu $p^{(k+1)(k-l)}$, so daß also $o({}_l\mathfrak{M}_{p^e}^k) = o({}_l\mathfrak{M}_{p^{e-1}}^k)\, p^{(k+1)(k-l)}$ gilt, woraus $\varphi_{k-l}(p^e) = \varphi_{k-l}(p^{e-1})\, p^{(k-l)^2}$ folgt.

Die soeben durchgeführten Überlegungen verwenden wir dazu, festzustellen, wann gilt: ${}_l\mathfrak{G}_n^k = {}_l\mathfrak{M}_n^k$. Dafür ist notwendig und hinreichend das Erfülltsein von

$$o({}_l\mathfrak{G}_n^k) = o({}_l\mathfrak{M}_n^k) \tag{35}$$

Ist nun $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, so ist (35) gleichbedeutend mit

$$o({}_a\mathfrak{G}_n^k) = o({}_a\mathfrak{M}_n^k) \cdot \qquad o({}_b\mathfrak{G}_n^k) = o({}_b\mathfrak{M}_n^k)$$

weshalb man nur noch $n = p^e$, p Primzahl, zu betrachten braucht. Gilt

in diesem Fall aber (35), so gilt, wie man aus der homomorphen Abbildung ${}_l\mathfrak{G}^k_{p^e} \to {}_l\mathfrak{G}^k_{p^{e-1}}$ sofort sieht, auch $o({}_l\mathfrak{G}^k_{p^e-1}) = o({}_l\mathfrak{M}^k_{p^e-1})$, deshalb auch

$$o({}_l\mathfrak{G}^k_{p^s}) = o({}_l\mathfrak{M}^k_{p^s}) \tag{36a}$$

und

$$o({}_l\mathfrak{G}^k_{p}) = o({}_l\mathfrak{M}^k_{p}) \tag{36b}$$

(36a) natürlich nur, wenn $e > 1$. Setzt man nun zunächst in (36b) die Werte der Ordnungen nach Satz V bzw. Satz XIII ein, so ergibt eine leichte Rechnung, daß diese Gleichung — vom trivialen Fall $k = l$ abgesehen — erfüllt ist genau für:

$$k = 1; l = 0; p = 2, 3 \text{ und } k = 2; l = 0, 1; p = 2$$

In diesen Fällen haben wir also zu untersuchen, ob auch (36a) gilt. Hier haben wir einzusetzen aus Satz VIII bzw. Satz XIII und erhalten, daß dies nur für

$$k = 1, l = 0, p = 2$$

erfüllt ist. Wir haben also noch nachzusehen, ob $o({}_0\mathfrak{G}^1_8) = o({}_0\mathfrak{M}^1_8)$ gilt, wozu wir Satz XI verwenden müssen, und sehen, daß dies nicht erfüllt ist, so daß wir schließlich haben:

Satz XIV: Die Beziehung ${}_l\mathfrak{G}^k_n = {}_l\mathfrak{M}^k_n$ gilt außer für $k = l$ genau in den Fällen: $k = 1, l = 0, n = 2, 3, 4, 6, 12$;, $k = 2, l = 0, 1, n = 2$.

Unter den natürlichen Untergruppen von ${}_l\mathfrak{M}^k_n$ wiederum ist vor allem die aus den Elementen mit Repräsentantenvektor $A\,\mathfrak{x}$, wo A die Form (33) hat, gebildete von Bedeutung und ja auch schon oft betrachtet worden. Wir erwähnen nur noch, daß diese Gruppe auch Untergruppe ist in der natürlichen Untergruppe $\mathfrak{F}^k_n$ von ${}_0\mathfrak{G}^k_n$ aus allen Elementen, die sich repräsentieren lassen durch Polynomvektoren, bestehend aus lauter Formen gleichen Grades.

§ 15. Nun betrachten wir eine andere natürliche Untergruppe von ${}_l\mathfrak{G}^k_n$, nämlich die Untergruppe, deren sämtliche Elemente einen Repräsentanten (1) mit einem $\mathfrak{g}_{k-l}(\mathfrak{x})$ aus lauter Komponenten der Gestalt $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_k^{\nu_k}$ besitzen. Daß diese Elemente tatsächlich eine Gruppe ${}_l\mathfrak{P}^k_n$ bilden, ist ja leicht zu sehen, und die Struktur dieser Gruppe wollen wir feststellen.

Ist F ein Element aus ${}_l\mathfrak{P}^k_n$, so besitzt es einen Repräsentantenvektor

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_1^{\nu_{11}} x_2^{\nu_{12}} \ldots x_k^{\nu_{1k}}, x_1^{\nu_{21}} x_2^{\nu_{22}} . x_k^{\nu_{2k}} \ldots) \tag{37}$$

der natürlich ein volles Vektorsystem mod n erzeugt. Es kann daher keine der Komponenten von (37) eine Konstante sein, daher gilt $\mathfrak{f}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$,

also muß für $\mathfrak{x} \not\equiv \mathfrak{o} \bmod n$ stets $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \not\equiv \mathfrak{o} \bmod n$ sein. Setzt man nun in (37) der Reihe nach die Vektoren $(1, 0 \ldots 0)$, $(0, 1, 0 \ldots 0)$ usw. ein, so sieht man, daß jedes der x_ν in mindestens einer Komponente allein vorkommen muß, daher muß $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ aus (37) so aussehen:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_{\nu_{l+1}}^{r_{l+1}} \ldots x_{\nu_k}^{r_k}) \tag{38}$$

wo $r_{l+1} \ldots r_k$ eine Permutation der Zahlen $l+1 \ldots k$ bildet. Außerdem muß in (38) jede Komponente ein volles Restsystem mod n erzeugen. Nun verwenden wir einige Ergebnisse von § 1 aus [2] und sehen daraus, daß für nicht quadratfreies n stets $r_j = 1$ sein muß. Bei quadratfreiem n jedoch muß für jedes r_j gelten: $(r_j, \bar{n}) = 1$, wo $\bar{n}$ das kl. gem. Vielfache der φ-Funktionen aller Primteiler von n ist; man erkennt weiter, daß F in diesem Fall auch einen Repräsentanten der Gestalt (38) besitzt, bei dem jedes der r_j einem gegebenen positiven, primen Restsystem mod $\bar{n}$ angehört. Umgekehrt repräsentiert ein Polynomvektor (38) in jedem der beiden Fälle ein Element aus ${}_l\mathfrak{P}_n^k$, wenn er die bei dem betreffenden Fall angegebene Bedingung erfüllt. Unter Zuhilfenahme eines Ergebnisses von § 1 aus [2] und der bisherigen Überlegungen ergibt sich also

Satz XV: Man erhält ein genaues Normalrepräsentantensystem für ${}_l\mathfrak{P}_n^k$ *bei nicht quadratfreiem n, wenn man in*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_{\mu \mid l+1} \ldots x_{\mu \mid k}) \tag{39}$$

das Symbol μ alle Permutationen der Zahlen $l+1 \ldots k$ durchlaufen läßt. Für quadratfreies n erhält man ein genaues Normalrepräsentantensystem, wenn man in

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_{\mu \mid l+1}^{r_{l+1}} \ldots x_{\mu \mid k}^{r_k}) \tag{40}$$

das μ ebenfalls wieder alle Permutationen von $l+1 \ldots k$, die r_j jedoch sämtlich ein primes Restsystem mod $\bar{n}$ durchlaufen läßt.

Es sei nun

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_{\nu \mid l+1}^{s_{l+1}} \ldots x_{\nu \mid k}^{s_k})$$

ebenfalls Repräsentant eines Elementes $G \in {}_l\mathfrak{P}_n^k$. Dann wird FG repräsentiert durch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) = (x_1, x_2 \ldots x_l, x_{\nu\mu \mid l+1}^{r_{l+1}\, s_{\mu \mid l+1}}, \ldots x_{\nu\mu \mid k}^{r_k\, s_{\mu \mid k}})$$

Da dies für beide zu betrachtenden Fälle gilt, erkennen wir daraus

Satz XVI: Die Gruppe ${}_l\mathfrak{P}_n^k$ *ist für nicht quadratfreies n invers isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{k-l}$. Ist aber n quadratfrei, so ist sie isomorph zu der monomialen Matrixgruppe, die man aus der regulären Darstellung*

von $\mathfrak{S}_{k-l}$ erhält, wenn man die prime Restklassengruppe mod $\bar{n}$ als Multiplikatorenbereich nimmt.

Zum Abschluß erwähnen wir noch eine weitere natürliche Untergruppe von ${}_l\mathfrak{G}_n^k$, ohne aber darauf einzugehen. Diese Untergruppe wird gebildet aus allen Elementen von ${}_{''}\mathfrak{G}_n^k$, die einen Repräsentantenvektor von folgender Gestalt besitzen:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_l, g_{l+1}(\mathfrak{x}) \ldots g_k(\mathfrak{x}))$$

wobei $g_\nu(\mathfrak{x}) = x_\nu + h_\nu(x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1})$ für $\nu = l+1, \ldots k$ gilt. Man rechnet leicht nach, daß diese Elemente tatsächlich eine Gruppe bilden. Im Falle $n = p$ (Primzahl) und $l = 0$ wurde diese Gruppe von Kaloujnine zur Untersuchung der p-Sylowgruppen der $\mathfrak{S}_{p^k}$ verwendet[13].

[13] *Kaloujnine*, La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **65**, 239—276 (1948).

Buchbesprechungen.

Vito Volterra: Opere Matematiche. Volume primo. XXXIII, 604 S. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei. 1954. Lire 8000.

Die Italienische Akademie der Wissenschaften zusammen mit dem „Consiglio Nazionale delle Ricerche" geben die gesammelten Werke der großen italienischen Mathematiker heraus. Der vorliegende Band enthält die Arbeiten von *V. Volterra*, welche in den Jahren 1881—1892 entstanden sind. Der Band beginnt mit einer Würdigung der Verdienste *Volterras* für die „Accademia Nazionale dei Lincei" von *Castelnuovo*, sowie einer Übersicht über sein wissenschaftliches Werk und einen Lebenslauf von *C. Somigliana* und *J. Peres*. Dann folgen insgesamt 37 Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik, wie Funktionentheorie, Differentialgleichungen, „fonetions de lignes" (ein von *Volterra* neu begründeter Zweig der Analysis), Potentialtheorie, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie, Elektrodynamik, Elektrochemie u. a. Erstaunlich ist die Vielseitigkeit dieses Forschers und die Virtuosität, mit welcher er einen umfangreichen analytischen Apparat zu führen verstand. Sein Werk wird jedem Mathematiker Vorbild und Anregung sein. *K. Prachar*, Wien

Salvatore Pincherle: Opere scelte. Band II. 493 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1954. Lire 4500.

Wie bereits in dieser Zeitschrift Bd. **58**, S. 306—307 mitgeteilt wurde, gibt die Unione Matematica Italiana einen Teil der Arbeiten von *S. Pincherle* in einem zweibändigen Werk heraus. Der zweite Band enthält 23 Arbeiten, die durchwegs der Analysis und zwar meist der Funktionalanalysis angehören.

N. Hofreiter, Wien

Mathematik in deiner Welt. Von ihrem Geist und ihrer Art zu denken. Von *K. Menninger*. Mit 160 Textabb., 232 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1954. DM 12.80.

Ein reizendes Buch, das nicht ein Lehrbuch, sondern ein Lesebuch sein will, in dem man ungezwungen bzw. je nach Interesse bald hier, bald da lesen kann. Es wendet sich an die Freunde der Mathematik und auch an jene, die ihr feind sind. Es enthält keine Formeln, dafür zahlreiche Beispiele und 160 Abbildungen. Wer den behandelten Fragenkreis von der rechnerischen Seite verfolgen will, für den ist im Kleindruck das Nötige vermerkt. Das Buch ist mit viel Einfall und gutem Witz geschrieben und zeigt an interessanten und lehrreichen Beispielen, daß man im täglichen Leben immer wieder auf den mathematischen Geist stößt. Die Mathematik erweist sich als Ordnerin in allen Bereichen unseres Lebens, ja, sie ist die Urwissenschaft des ordnenden Denkens.

Der Leser tritt mit Hans Jedermann einen Gang durch das weite Reich der Mathematik an. Hans Jedermann spielt verschiedene Spiele und muß erkennen, daß selbst ein ungebundenes Spiel seine innere Ordnung hat, in der die Mathematik eine Rolle spielt. Hans Jedermann betrachtet den Floh und den Elefanten und läßt sich vom Mathematiker erläutern, welche biologischen Folgen eine

Vergrößerung haben kann (Vergleich der Sprungweite zur Körperlänge; Betrachtungen über den Wärmehaushalt, über die Beweglichkeit und Knochenfestigkeit). Hans Jedermann verwendet genormte Nägel und genormtes Papier und erkennt den Vorteil, den die Normung in Industrie und Technik, in der Wirtschaft und im täglichen Leben bringt. Der Leser erlebt mit Hans Jedermann auf einer Autofahrt die Quer-, Längs- und Schrägneigung der Straße, den Wechsel der Steigungen, die Tücken der Krümmungsänderung der Fahrbahn, die Seitenkraft, den Krümmungsruck, den Hangabtrieb, usw.

Hans Jedermann besucht eine Fabrik und lernt Begriffe wie Häufigkeit, Verteilung, Verteilungsbild, Stichprobe, Normalverteilungskurve kennen und läßt sich über ihre Bedeutung zur Aufdeckung von Herstellungsfehlern berichten.

Ob Hans Jedermann in der Lotterie das große Los zieht oder bei der nächsten Autofahrt eine Panne hat, das bringt die Gedanken auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit und auf das Gesetz der großen Zahl. An Hand von treffenden Beispielen erkennt er: Die große Zahl wird vom Gesetz beherrscht, die kleine Zahl vom Zufall.

Warum wir den Kaffee mahlen, das wird genau auseinandergesetzt, ebenso die bei der Teilung eines Körpers vor sich gehende Vergrößerung der Oberfläche. Der Begriff der Massigkeit, des Verhältnisses des Rauminhaltes zur Oberfläche eines Körpers, wird an leicht faßlichen Beispielen eingeführt, und es wird auf seine Bedeutung in der Natur (Wärmehaushalt), in Baukunst und Technik hingewiesen.

So ließen sich noch zahlreiche interessante Fragenkreise erwähnen, die der Verfasser treffend darzustellen weiß. Wer dieses Buch zur Hand nimmt, ist so gefesselt von seinem Inhalt, daß es ihm, dem Leser, schwerfällt, das Buch wieder wegzulegen. Dieses überaus vergnügliche Buch wird recht viele Freunde finden.

J. Laub, Wien

Lehrbuch der Logistik. Von *K. Dürr*. VIII, 181 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1954. Geb. sfr. 22.90, DM 22.90.

Wie es scheint, verfolgt das Buch den Zweck, dem philosophisch interessierten Leser eine Vorstellung über die Arbeitsweise der modernen mathematischen Logik zu geben. Dies dürfte zu der vorliegenden Stoffumgrenzung geführt haben: Der Autor stellt die Grundzüge der Aussagenlogik des ein- und zweistufigen Prädikatenkalküls, des erweiterten Kalküls (Hinzunahme der Identität) und des Klassen- und Relationskalküls dar. Zum Teil tragen die Ausführungen referierenden Charakter. Weitergehende Ergebnisse sind im allgemeinen nicht berücksichtigt. So wird man auch die Namen *Gödel*, *Herbrand*, *Löwenheim*, *Skolem* u. a. vergeblich suchen. *Lewi*'s System der strikten Implikation ist erwähnt, jedoch fehlt jeder Hinweis auf die intuitionistische Logik. Vielfach bedient sich der Autor der von *Quine* entwickelten Methoden. Er bezeichnet auch den Prädikatenkalkül als Logik der Quatifikation. In manchen grundlegenden Definitionen schließt sich der Verf. der durch die neuen Arbeiten von *Carnap* vorgezeichneten Linie an. Im wesentlichen benutzt der Verf. den semantischen Aufbau. Er stützt sich auf die Methode der Bewertung. Eine Zusammenstellung allgemein gültiger Sätze der erwähnten Kalküle findet sich im Anhang, ein Teil derselben wird im Text abgeleitet. In der Symbolik schließt sich der Verf. der linearen Schreibweise von *Lukasiewicz* an. Es war dem Ref. nicht möglich, stets völlige Klarheit zu erlangen. Dies mag daran liegen, daß der Verf. Einbußen bei der Schärfe der Beweisführung hingenommen hat, um nicht über den Rahmen der zur Verfügung stehenden Mittel hinauszugelangen.

L. Schmetterer, Wien

Algèbre. Von *P. Dubreil.* Zweite Auflage. Band I: Equivalences, opérations, groupes, annèaux, corps. (Cahiers scientifiques: fasc. XX.) XII, 468 S. Paris: Gauthier-Villars. 1954. ffr. 3900.

Durch dieses Buch ist die Sammlung „Cahiers scientifiques" um ein sehr wertvolles Werk bereichert worden. Die zweite Auflage unterscheidet sich durch die vielen Erweiterungen und Änderungen ganz wesentlich von der ersten. Nur die Grundtendenz, ein Lehrbuch der abstrakten Algebra zu sein, ist gleich geblieben. Abstrakte Algebra ist die Untersuchung von Mengen, in denen Operationen gegeben sind. Was die einzelnen Elemente sind, ist belanglos, wesentlich sind nur die Gesetze der Operationen. Untersucht werden Mengen mit einer Operation, z. B. Halbgruppen und Gruppen, aber auch solche mit mehreren Operationen, z. B. Ideale, Ringe und Körper. Die Operationen mögen kommutativ, aber auch nicht kommutativ, assoziativ oder nicht assoziativ, distributiv oder nicht distributiv sein. Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Mengenlehre (Durchschnitt, Vereinigung, Relationen, Äquivalenz, Abbildungen, Homomorphismus, geordnete und wohlgeordnete Mengen). Bereits hier aber auch in allen weiteren Kapiteln spielen die Verbände eine große Rolle. Auch die Noten im Anhang bringen einiges aus der Mengenlehre (endliche Mengen, natürliche Zahlen, Auswahlaxiom, metrische und topologische Räume, abzählbare Mengen und Mengen mit der Mächtigkeit des Kontinuums). Alle übrigen Kapitel sind der Algebra gewidmet. Ich will den Inhalt schlagwortartig charakterisieren: Halbgruppen, Gruppen, Untergruppen, Normalteiler, Isomorphismus, Homomorphismus, Automorphismus, reguläre Äquivalenzen, Zerlegung von Gruppen, Idealtheorie in kommutativen und nicht-kommutativen Ringen, Erweiterung von Halbgruppen, Erweiterung von Integritätsbereichen, Erweiterung von nicht-kommutativen Bereichen, geordnete Körper, reelle Körper, archimedische und nicht-archimedische Körper, Zerlegung in Halbgruppen, Ringen und Integritätsbereichen, Hauptideale, Polynome, *E. Noethersche* Ringe, Basissatz von *Hilbert*, euklidische Ringe, Zerlegung von Polynomen, Irreduzibilitätskriterien, algebraische und transzendente Erweiterung, Polynomideale, Schnitte von algebraischen Kurven, der Satz von *M. Noether*, symmetrische Funktionen. Die neuesten Beiträge des Verfassers zur Theorie der Halbgruppen werden im 5. Kapitel gebracht.

Die Vorkenntnisse, die an den Leser gestellt werden, sind gering. Allerdings ist eine gewisse Reife erforderlich. Kenntnisse aus der Algebra sind nicht notwendig, da alles ausführlich entwickelt wird. Wie bei fast allen Lehrbüchern der abstrakten Algebra ist es allerdings besser, der Leser hat bereits algebraische Kenntnisse. Er findet dann viele der ihm bekannten Sätze in allgemeinerer Form wieder und erkennt die Tragweite der Prinzipien und der Sätze. Die Beweise werden mit allen Details geführt und sind vielfach einfach und weitreichend gültig. Das Buch ist nicht nur ein ausgezeichnetes Lehrbuch für Studierende, es ist auch für Mathematiker dank vieler neuer Ergebnisse und der neuen Art der Darstellung sehr wertvoll.

N. Hofreiter, Wien

Höhere Algebra. Von *W. L. Ferrar.* Mit 31 Textabb., 336 S. München: R. Oldenbourg. 1954. DM 18.50.

Der Titel könnte irreführen, wenn man etwa an die Höhere Algebra von *H. Hasse* oder an die Einführung in die Höhere Algebra von *G. Pickert* denkt. Von Gruppentheorie, Körpertheorie und Galoisscher Theorie ist in dem Buch keine Rede. Das Buch ist eine Fortsetzung der „Elemente der Algebra" des Verfassers und ebenso wie dieses ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik,

der Physik und der Technik. Es ist sehr breit und leicht verständlich geschrieben und enthält mehr als 500 Aufgaben samt den Lösungen. Es ist eine mehr praktische Einführung und geht theoretisch nicht tief. Es bringt einiges über Polynome, ferner über Gleichungen 3. und 4. Grades und über die numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen. Alles übrige rechnet man im deutschen Sprachgebiet mehr zur Analysis wie: Ungleichungen, Reihen, komplexe Zahlen, Partialbrüche, Differenzengleichungen und erzeugende Funktionen.

N. Hofreiter, Wien

Praktische Algebra. Von *H. Dörrie*. Mit 8 Textabb., VIII, 259 S. München: R. Oldenbourg. 1955. Geb. DM 24.—.

Die praktische Algebra sieht ihre Hauptaufgabe in der Ermittlung der Nullstellen von Polynomen. Bücher, die für die angewandten Mathematiker geschrieben sind, beschränken sich meist auf die näherungsweise Auflösung von algebraischen Gleichungen. Das trifft aber hier nicht zu. An der Spitze stehen gleich zwei Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra. Dann folgen Untersuchungen über Teilbarkeit von Polynomen und über symmetrische Funktionen. Einen breiten Raum nehmen spezielle Gleichungen (Kreisteilungsgleichungen, kubische und biquadratische Gleichungen) ein. Erst dann folgt die näherungsweise Auflösung von Gleichungen. Dazu gehören bekanntlich die Ermittlung von oberen und unteren Schranken der Wurzeln, die Berechnung der Anzahl der Wurzeln in einem Intervall, die Regula falsi, die Newtonsche Näherungsmethode usw. Die Descartessche Zeichenregel wird nicht wie üblich als Spezialfall des Satzes von *Budan-Fourier*, sondern mit Hilfe des Wechselzahlsatzes von *Gauß* abgeleitet. Merkwürdigerweise fehlt die Methode von *Gräffe*. Ein Abschnitt bringt Sätze über Primärpolynome, das sind Polynome, die nur reelle Wurzeln besitzen. Auf den letzten 80 Seiten werden 102 Aufgaben gestellt und ausführlich gelöst. Sie bringen oft Beweise von interessanten, wenig bekannten Sätzen. Das Buch steht zwar außerhalb der heute üblichen Kursusvorlesungen über Algebra an den Universitäten, hat aber manche Reize in der Darstellung und in der Auswahl des Stoffes und verdient daher besonders beachtet zu werden. *N. Hofreiter*, Wien

Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlenkörper. Von *H. W. Leopold*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: Jahrgang 1953, Nr. 2.) 48 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 5.—.

Diese Arbeit ist eine Ergänzung zur Monographie von *H. Hasse* über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Der erste Teil behandelt die algebraischen Grundlagen für die Untersuchung der Struktur der Einheitengruppe und für das Problem der Klassenzahl. Dazu gehören der rationale Gruppenring von abelschen Gruppen und die Zerlegung von Gruppendeterminanten. Teil II bringt eine Untersuchung der Struktur der Einheitengruppe reeller abelscher Zahlkörper. Von besonderer Bedeutung sind hiebei gewisse Relativeinheiten. Damit läßt sich die Einheitengruppe durch den Einheitenkern und den Einheitenindex beschreiben. Der direkten Zerlegung einer vollständigen Einheitengruppe entspricht die Produktzerlegung ihres Regulators. Der dritte Teil handelt von der Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Mit Hilfe der Einheitengruppe wird eine arithmetische Darstellung der Klassenzahl aus der Kummerschen Formel entwickelt. Ferner wird eine Komponentenzerlegung der Klassenzahl abgeleitet.

N. Hofreiter, Wien

Zur modernen Klassenkörpertheorie. Von *W. Jehne* (Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften: Jahrgang 1954, Heft 3.) 8 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 1.—.

Der Verfasser kündigt hier eine Reihe von Sätzen zur neuen Theorie von *A. Weil* (Journal of Math. Soc. Japan 3, 1—35 (1951)) an. Topologische Methoden werden möglichst durch gruppentheoretische-arithmetische Methoden ersetzt. Eine Darstellung der Beweise soll später erfolgen. *E. Hlawka*, Wien

Contributions to the Solution of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues. Herausgegeben von *Olga Taussky*. National Bureau of Standards. (Applied Mathematics Series: Nr. 39.) 139 S. Washington: Department of Commerce. 1954. $ 2.—.

Vor einem Jahr haben *L. J. Paige* und *Olga Taussky* eine Sammlung von Aufsätzen über „Simultaneous Linear Equations and the Determination of Eigenvalues" in der gleichen Sammlung herausgegeben (Rez. in Monatsh. Math. **58**, 64 (1954)). Dieses Buch stellt eine Fortsetzung dar, kann aber unabhängig von obigem Buch gelesen werden. Es enthält einen großen Aufsatz von *L. Fox* über die praktische Auflösung von linearen Gleichungssystemen. Er gibt eine gute Übersicht über die verschiedenen indirekten und direkten Methoden, enthält 26 numerische Beispiele und wertvolle Ratschläge über die Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden. Theoretisch sehr interessant ist der Aufsatz von *R. M. Hayes* über iterative Methoden zur Lösung linearer Probleme im Hilbertschen Raum. Über die Gradientenmethoden berichtet eine Arbeit von *A. J. Forsythe* und *G. E. Forsythe*. Das Buch enthält noch zwei kleinere Arbeiten von *I. R. Savage*, *E. Lukacs* und *John Todd* über endliche Abschnitte der *Hilbert* Matrizen und zwei Arbeiten über Eigenwerte von *Ky Fan* und *A. J. Hoffman*.

N. Hofreiter, Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *A. Ostrowsky*. Dritter Band: Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. 475 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1954. sfr. 78.—.

Nach einer Pause von drei Jahren ist nunmehr der letzte Teil des ausgezeichneten Lehrbuches erschienen. Es bringt zunächst ein Kapitel über die Technik des Integrierens, an dessen Abschluß noch der Transzendenzbeweis für e, sowie ein allgemeiner Satz über die Tragweite der Adjunktion unbestimmter Integrale zu einem Funktionsbereich stehen. Dann folgt der Hauptteil des Buches, der die Theorie der mehrfachen Integrale, sowie der uneigentlichen Integrale umfaßt. Der Weg des Verf. weicht dabei stark vom üblichen ab: zunächst wird das Doppelintegral über einem Rechteckbereich definiert, in dem der (beschränkte) Integrand bis auf eine Menge vom (Jordan'schen) Inhalt Null stetig ist. Diese Definition wird dann auf beschränkte quadrierbare Integrationsbereiche ausgedehnt. Es folgt die Behandlung der Linienintegrale, sowie die Variablentransformation, die Sätze von *Gauß-Green-Stokes*, sowie die Anwendung auf Volums- und Schwerpunktsberechnung. Dann werden die einfachen uneigentlichen Integrale mit besonderer Berücksichtigung von Grenzübergängen unter dem Integralzeichen behandelt und einige wichtige Beispiele durchgerechnet, wobei besonders auf die Verallgemeinerung der Integrale von *Frullani* hingewiesen sei. Schließlich wird der letzte Schritt zur Erreichung der vom Verf. angestrebten Allgemeinheit hinsichtlich der mehrfachen Integrale getan, indem auf die Beschränktheit der Funktion verzichtet und das Integrationsgebiet als beliebige

offene Menge vorausgesetzt wird, auf der die Stetigkeit des Integranden verlangt wird. Die Integraldefinition erfolgt dabei so, daß die offene Menge durch monoton wachsende Folgen quadrierbarer Bereiche ausgeschöpft und die Existenz des Grenzwertes der betreffenden Integrale für jeden derartigen Exhaustionsvorgang gefordert wird. Dies kommt auf das Integral nach *Lebesgue*, einer auf dem offenen Integrationsgebiet stetigen Funktion hinaus. Für diesen erweiterten Integralbegriff werden dann die wichtigsten Sätze der Integralrechnung neuerlich bewiesen; es sei hier insbesondere die Ungleichung von *Schwarz* erwähnt, der der Verf. die „Unbestimmtheitsungleichung" von *Pauli* anschließt. Eine recht eingehende Behandlung der Eulerschen Integrale bildet den Abschluß der Integralrechnung. Das letzte Kapitel des Buches behandelt Reihe und Integral von *Fourier;* die Konvergenz der Reihe wird unter Voraussetzung der absoluten Integrabilität für alle Stellen bewiesen, an denen beiderseitige Ableitungen vorhanden sind. Unstetigkeiten sowie Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz kommen ebenfalls zur Behandlung und als Beispiele werden die Summenformel von *Poisson* (mit Anwendung auf die Thetafunktion) sowie die Theorie des linearen Oszillators gegeben.

Diese kurze Inhaltsübersicht kann natürlich keinen Begriff von dem Reichtum an originellen Einzelheiten geben, die sich nicht zum wenigsten in dem gebotenen reichen Übungsmaterial finden; es sei aber abschließend die Frage aufgeworfen, ob nicht doch — trotz der im Vorwort vom Verf. vertretenen entgegengesetzten Meinung — die Behandlung der mehrfachen Integrale nach der Theorie von *Lebesgue* vorzuziehen gewesen wäre. Das nach Meinung des Referenten nicht allzu bedeutende Mehr an Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit des Lesers, der ja durch die beiden ersten Bände eine ausreichende Vorschule durchlaufen hat, wäre durch den Gewinn an Allgemeinheit und Einheitlichkeit wohl reichlich aufgewogen. Gehören doch außerdem heute die Lebensgueschen Theorien zu den für viele Anwendungen der Analysis unentbehrlichen Grundlagen, und es wäre ihr in einem Werk vom Umfang und von der Bedeutung des vorliegenden wohl ein Platz zu gönnen.

Abgesehen von diesem grundsätzlichen Vorbehalt stellt *Ostrowski*'s Buch eine imponierende Leistung dar, zu deren Abschluß wir dem Verfasser herzlich gratulieren; es wird sicherlich auf lange Zeit eine der besten Einführungen in die Analysis bilden.

J. Radon, Wien

Reelle Funktionen. Von *G. Aumann.* („Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete". Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXVIII.) Mit 22 Textabb., VIII, 416 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 56.—, geb. DM 59.60.

Das Buch knüpft an die moderne Literatur mit ihren umfassenden Begriffsbildungen an, ohne dabei den klassischen Bestand der Theorie zu übersehen. Dank der präzisen und zugleich knappen Darstellungsweise, die konsequent einige logistische Zeichen benützt, gelingt es von den Anfängen der Mengenlehre an einen sehr großen Stoff unterzubringen und hierdurch eine empfindliche Lücke in der deutschsprachigen Literatur zu füllen. Bei einigen wenigen Vorkenntnissen, jedoch hinreichender Gewandtheit im abstrakten Denken, wird jeder mathematisch interessierte Leser des Buches einen großen Gewinn erzielen.

Nachdem in **1** die Grundtatsachen über abstrakte Mengen erörtert sind, behandelt **2** geordnete Mengen verschiedener Art. Die wohlgeordneten Mengen

führen auf die transfiniten Zahlen. Diese ermöglichen die Erklärung der abstrakten *Borel*'schen Mengen, die ihrerseits zu den *Suslin*'schen erweitert werden. Die Begriffe Infimum und Supremum können von den Zahlen auf die teilweise geordneten Mengen übertragen werden; damit lassen sich dann die üblichen Limes-Begriffe auf „gerasterte", insbesondere auf „gerichtete" Systeme ausdehnen und eine allgemeine Konvergenztheorie entwickeln. In **3** werden die Verbände als Systeme mit doppelter Komposition erklärt, die noch passend teilweise zu ordnen sind. Im Mittelpunkt stehen die *Boole*'schen Verbände, insbesondere deren Isomorphie zu den Mengenkörpern. Ein *Boole*'scher σ-Verband ist stets isomorph zu einem σ-Verband aus gewissen Restklassen eines σ-Mengenkörpers, ohne aber notwendig zu einem solchen Körper selbst isomorph zu sein.

4 behandelt die metrischen, die linearen und vor allem die topologischen Räume, wozu noch die Konvergenzräume treten. Neben zahlreichen allgemeinen Begriffen und Sätzen für diese Räume wird u. a. gezeigt, daß eine *Suslin*'sche Menge eines topologischen Raumes nicht *Borel*sch zu sein braucht, im Falle eines metrischen Raumes jedoch stets die *Baire*'sche Eigenschaft hat, ohne aber hierdurch gekennzeichnet zu sein. Im Mittelpunkt von **5** steht die Stetigkeit der reellen Punktfunktionen, daneben die Halbstetigkeit sowie die Verteilung der Unstetigkeitsstellen. An die Bestimmung topologischer Räume, auf denen hinreichend allgemeine stetige Funktionen möglich sind, ist der Metrisationssatz von *Urysohn* angeschlossen. Die stetigen Funktionen eines metrischen Raumes führen auf die *Baire*'schen Klassen dieses Raumes, ferner auf die Verallgemeinerung des *Weierstraß*'schen Approximationssatzes durch *M. H. Stone*. Weiters werden Gleichungen nach dem *Banach*'schen Fixpunktsatz durch sukzessive Approximation gelöst, für Abbildungen linear normierter Räume Differentiationsprozesse eingeführt und der Zwischenwertsatz der stetigen Funktionen einer Veränderlichen auf Grund des *Brouwer*'schen Fixpunktsatzes auf Funktionen von n Variablen erweitert. In **6** werden reelle Funktionen auf Produkträumen betrachtet, die in den einzelnen Variablen stetig sind, ferner Grenzprozesse nach einer Variablen bei festen übrigen. **7** ist ein Umriß der Infinitesimalrechnung der Funktionen einer reellen Variablen. Nach allgemeinen Monotoniekriterien mittels der Derivierten wird der klassische Begriff der Stammfunktion allgemeiner gefaßt und gezeigt, daß jedenfalls die „Regelfunktionen" eine Stammfunktion in diesem Sinne besitzen. Noch allgemeinere Stammfunktionen hat man in den *Perron*'schen Integralen. Ein allgemeines Erweiterungsprinzip ermöglicht es, von den *Stieltjes*-Integralen der Treppenfunktionen nach einer festen, nicht fallenden Funktion $p(x)$ zum *Stieltjes*-Integral der Regelfunktionen, dem *Riemann-Stieltjes*- und dem *Lebesgue-Stieltjes*-Integral nach $p(x)$ zu gelangen. Über diese Integrale werden zahlreiche Sätze bewiesen, insbesondere über das *Lebesgue*'sche Integral als solches, ferner die Bereiche der Funktionen, für welche die einzelnen Integrale im Falle $p(x) = x$, bzw. Stammfunktionen existieren, gegeneinander abgegrenzt. Der größere Teil von **8** bringt Verfahren, welche es ermöglichen, aus gegebenen Somenfunktionen solche mit Additivitätseigenschaften herzuleiten. Weiters werden Inhalte und Maße als Somenfunktionen verschiedentlich erweitert oder reduziert und die allgemeinen Ergebnisse auf das *Lebesgue*'sche Maß angewendet. In **9** wird eine allgemeine Integrationstheorie nach *M. H. Stone* entwickelt, welche die Integrale durch eine passende stetige Erweiterung eines positiven linearen Funktionals auf einem teilweise geordneten, linearen Funktionenraum ergibt. Die integrierbaren Funktionen führen auf die meßbaren und diese zu einem Maß. Weiters werden einzelne mit den Integralen verbundene Funktionenräume untersucht, ferner die Integrale, die zu verschiedenen Funktionalen auf demselben Funktionenraum gehören,

miteinander verglichen und abschließend der Satz von *G. Fubini* über iterierte Integrale in verallgemeinerter Form hergeleitet. *K. Mayrhofer*, Wien

Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Von *I. P. Natanson*. XI, 478 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 26.—.

Im Mittelpunkt des russisch geschriebenen Lehrbuches von *I. P. Natanson*, das in deutscher Übersetzung vorliegt, steht der klassische Bestand an Sätzen über die meßbaren Funktionen sowie über das *Lebesgue*'sche Integral im Bereiche dieser Funktionen, bei Bevorzugung der Funktionen von einer Variablen. Dieser Gegenstand wird von den Anfängen der Mengenlehre an aufgebaut und dann mannigfachen spezielleren Untersuchungen zugrunde gelegt. Hierher gehören u. a. die Orthogonalreihen der quadratisch summierbaren Funktionen $f(x)$ und deren Zusammenhang mit dem *Hilbert*'schen Raum, ferner die Darstellung einer Funktion $f(x)$ durch singuläre Integrale (samt einem Verzeichnis solcher Integrale). Weiters werden die monotonen Funktionen, die Funktionen von endlicher Variation und die absolut stetigen Funktionen ausführlich behandelt, letztere auch als unbestimmte *Lebesgue*'sche Integrale. Die Dichte einer Punktmenge ermöglicht es, eine „approximative" Stetigkeit zu erklären und mit dieser einen weiteren Einblick in die Struktur der meßbaren Funktionen zu gewinnen. Ein eigenes Kapitel bringt die additiven, absolut stetigen Mengenfunktionen, deren Darstellung durch unbestimmte Integrale, sowie deren Differentiation. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen den absolut stetigen Funktionen $f(x)$ und den additiven, absolut stetigen Mengenfunktionen auf der Geraden hergestellt. Hervorgehoben sei noch der durchsichtige Beweis des *Hausdorff*'schen Satzes über die Unlösbarkeit des Inhaltsproblems von der Dimension drei an, ferner das Beispiel für eine ebene Punktmenge E, die in zwei fremde Teile zerlegt werden kann, deren jeder zu E kongruent ist.

Dazu kommt eine in sich geschlossene Darstellung der transfiniten Zahlen, ferner der *Baire*'schen Klassen über den auf einem Segment stetigen Funktionen $f(x)$ bei besonderer Berücksichtigung der Funktionen der ersten Klasse sowie der halbstetigen Funktionen. Einzelne Proben aus der Theorie der abstrakten Räume umfassen u. a. den *Banach*'schen Fixpunktsatz und dessen Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, lineare Integralgleichungen und unendliche Systeme von linearen Gleichungen.

Der überwiegende Teil des Buches besteht aus dem Stoffe, den die Lehrpläne der sowjetischen Universitäten vorsehen. Die Darstellung ist klar, übersichtlich und lebendig und geht vom Leichteren zum Schwereren vor. Die Definitionen und Sätze sind unabhängig vom übrigen Text leicht faßlich formuliert, die Sätze häufig durch Beispiele verdeutlicht und die Beweise bis ins Einzelne ausgeführt. Zur Vertiefung des Verständnisses ist eine größere Anzahl von Aufgaben eingefügt. Die ganze Art des Buches ist so, daß ein Leser, der die Anfänge der Infinitesimalrechnung beherrscht, in verhältnismäßig kurzer Zeit sich in den Stoff einarbeiten und diesen beherrschen kann. *K. Mayrhofer*, Wien

La sommation des séries divergentes. Von *M. Zamansky*. (Mémorial des Sciences Mathématiques: Heft 128.) 46 S. Paris: Gauthier-Villars. 1954.

Das Heft enthält eine Zusammenstellung von Fragen der Verträglichkeit und Vergleichbarkeit spezieller regulärer Summierungsverfahren. Berücksichtigt werden im wesentlichen alle praktisch bedeutsamen Summierungsmethoden. Die zahlreichen Sätze werden ohne Beweis angeführt, jedoch mit ausreichenden (allerdings nicht immer vollständigen) Literaturangaben versehen.

Das Heft bietet dem Spezialisten einen sehr wertvollen Behelf, gibt ihm einen Überblick und erspart ihm zeitraubende Literaturstudien. Am Schluß wird auf eine Reihe von einschlägigen Problemen verwiesen, wie denn überhaupt manch Neues dargestellt wird. *L. Schmetterer*, Wien

Existence Theorems for Ordinary Differential Equations. Von *F. J. Murray* und *K. S. Miller*. X, 154 S. New York: University Press. 1954. $ 5.—.

Das Buch bringt das Peanosche Existenztheorem, die Eindeutigkeit der Lösung unter der Lipschitzbedingung, die Picardsche Iteration, Eigenschaften der Lösung und einiges über lineare Differentialgleichungen. — Die ausgedehnte Entwicklung dieses Problemkreises seit dem Theorem von *Peano* (1890), die grundlegenden Arbeiten etwa von *Perron* um die Verfeinerung der Lipschitzbedingung und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit werden in diesem Buch nicht erwähnt. *H. Hornich*, Graz

Partielle Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel*. Dritte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 1003.) 130 S. Berlin: W. de Gruyter. 1953. DM 2.40.

In knappstem Rahmen wird hier von den partiellen Differentialgleichungen soviel als möglich geboten: die Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei und mehreren Variablen, Systeme von Differentialgleichungen und schließlich von den Differentialgleichungen zweiter Ordnung einiges, vor allem über hyperbolische Differentialgleichungen, während elliptische Differentialgleichungen nicht behandelt werden. Das Büchlein, das naturgemäß vieles nur berichten kann, wird auch in seiner dritten Auflage viele Freunde gewinnen. *H. Hornich*, Graz

Über die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D\frac{dx}{d\tau} + \mu \operatorname{sgn}\frac{dx}{d\tau} + x = \Phi(\eta\tau)$, wo $\Phi(\eta\tau + 2\pi) = \Phi(\eta\tau)$ ist. Das Verhalten der Lösungen für $\tau \to \infty$. Von *R. Reissig*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: Jahrgang 1953, Nr. 1.) 33 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 3.70.

Die im Titel genannte, durch physikalische Fragestellungen nahegelegte Differentialgleichung wird auf ihr Grenzverhalten untersucht: Alle für sämtliche τ erklärten Lösungen streben asymptotisch gegen eine und dieselbe periodische Lösung. *H. Hornich*, Graz

Le calcul symbolique á deux variables et ses applications. Von *L. Poli* und *P. Delerne*. (Mémorial des Sciences Mathématiques: Heft 127.) 77 S. Paris: Gauthier-Villars. 1954.

Das Buch gibt einen guten Überblick über die Theorie und über die zweidimensionale Anwendung der Laplace-Transformation. Zunächst werden allgemeine Probleme behandelt (Konvergenzeigenschaften, Inversionsformel). Die nächsten Kapitel sind den für das praktische Arbeiten unbedingt notwendigen Korrespondenzen zwischen Funktionentypen und ihren Transformierten gewidmet. Es folgen Anwendungen auf die wichtigsten Typen von partiellen Differentialgleichungen. Den Abschluß bilden Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen Laplace-Transformierten und speziellen Funktionen, wie die von *Humbert* studierten verallgemeinerten Bessel-Funktionen, den Laguerre-Polynomen und Hermite'schen Polynomen in zwei Variablen. In einem Anhang

finden sich Hinweise auf die n-dimensionale Laplace-Transformation. Die Darstellung trägt vielfach referierenden Charakter und ersetzt natürlich kein umfangreiches Lehrbuch, wie etwa das von *Voelker-Doetsch;* aber die recht zahlreichen Literaturangaben und Hinweise auf neue Ergebnisse, deren man etliche den Verfassern verdankt, lassen das Buch doch als unentbehrlich für den Mathematiker, Physiker und Ingenieur erkennen. *L. Schmetterer*, Wien

Theory of Games and Statistical Decisions. Von *D. Blackwell* und *M. A. Girshick*. XI, 355 S. New York: J. Wiley & Sons Inc. – London: Chapman & Hall Ltd. 1954. $ 7.50.

Die Verbindung von Spieltheorie und statistischen Entscheidungsfunktionen geht ursprünglich auf ein Konzept von *Wald* zurück, das dieser zunächst in einer Reihe von Arbeiten und dann in seinem bekannten Buch niederlegt. Inzwischen hat sich in dieser Richtung eine vielseitige Entwicklung angebahnt. Das vorliegende Buch vermag es, den Leser in diese Entwicklung hineinzuversetzen, an der die Autoren wesentlichen Anteil haben. Sieht man von dem erwähnten Buch von *Wald* ab, ist dies, soviel dem Ref. bekannt ist, das erste Werk dieser Art. Die Autoren bauen auf geringen mathematischen Vorkenntnissen auf, doch ist eine gewisse Höhe des abstrakten Denkens zum Verständnis unerläßlich. Der, dem Vorwort entnommene Satz: This book ist intended primarily as a textbook in decision theory for first-year graduate students, kann jedenfalls auf unsere Verhältnisse nicht übertragen werden. Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Theorie der Spiele. In klarer Weise werden hiezu die nötigen Hilfsmittel aus der Theorie der konvexen Mengen bereitgestellt. Basierend auf der Auffassung von *Wald* wird der Zusammenhang zwischen der Spieltheorie und den mathematisch statistischen Entscheidungsproblemen dargelegt. Im großen und ganzen beschränken sich die Autoren auf diskrete Verteilungen, illustrieren jedoch vieles auch an Beispielen stetiger Verteilungen. Es wird dann die Nutzen-Funktion eingeführt und hierauf das Prinzip der Minimax-Lösungen und der *Bayes*'schen Lösungen erklärt. Das folgende Kapitel führt die wichtigen Begriffe der optimalen und zulässigen Strategie und der vollständigen Klasse von Strategien ein. Die nächsten Kapitel sind prinzipiell wichtigen Beispielen statistischer Spiele gewidmet, welche sich auf Stichproben von festem Umfang beziehen. Das Hauptinteresse dürften wohl die folgenden Kapitel beanspruchen. Zunächst handelt es sich um den Zusammenhang zwischen erschöpfenden Schätzfunktionen und Invarianzanforderungen an statistische Spiele. Es wird nicht nur der Fall der gegenüber endlichen Transformationsgruppen invarianten Spiele betrachtet, sondern auch im Zusammenhang mit der bekannten Hypothese des t-Testes das Beispiel einer unendlichen Transformationsgruppe behandelt. Die endliche Permutationsgruppe führt auf die Zufallsauswahl aus endlichen Grundgesamtheiten. Die beiden folgenden Kapitel sind den Sequentialspielen gewidmet, und dann befassen sich die Autoren mit der Theorie der Schätzungen. Wir heben die *Bayes*'schen Schätzungen für den Fall quadratischer Verlustfunktionen hervor, die in letzter Zeit von einem der Verfasser gemeinsam mit *Savage* studiert wurden. Einiger Raum ist den Problemen der Translations- und Skalenparameter gewidmet, die erst neuerdings wieder Interesse gefunden haben. (Vgl. die Arbeiten von *Fraser*.) Das Buch enthält ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das bewußt keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, jedoch einen wertvollen Einblick in das Schrifttum gibt. Das Buch ist klar geschrieben und kommt nicht nur den Studierenden zugute, sondern wird auch in vielen Fällen als Grundlage für neue Fortschritte dienen. *L. Schmetterer*, Wien

Automatic Digital Computation. Proceedings of a Symposium held at the National Physical Laboratory on March 1953. VI, 296 S. London: Her Majesty's Stationery Office. 1954. £1/1/-net.

In den vorliegenden Band sind die Berichte und Diskussionen der dritten internationalen Tagung über elektronische Rechenautomaten gesammelt. Sie beschäftigen sich mit der Konstruktion und Verwendung der Automaten und der Programme und den bisher gemachten Erfahrungen auf diesem Gebiet, welche klar die Erfolge, aber auch die Enttäuschungen erkennen lassen.

E. Hlawka, Wien

Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications. Von *J. A. Schouten*. Zweite Auflage. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: Band 10.) Mit 16 Textabb., XX, 516 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 55.—, geb. DM 58.60.

Das vorliegende Werk ist ein vollkommen neues Buch und hat mit der ersten Auflage, welche 1923 erschienen ist, nicht mehr viel zu tun. Es werden die heute modernsten Methoden und Ergebnisse vorgeführt und es wird immer größtmögliche Allgemeinheit angestrebt. Dies zeigt sich bereits im ersten Kapitel, welches den algebraischen Grundlagen des Kalküls gewidmet ist. Hier finden sich z. B. außer Vektoren, Tensoren, Pseudotensoren, Tensordichten auch die sogenannten hybriden Größen. Kap. 2 ist mit „Analytische Preliminarien" überschrieben und bringt z. B. die Integrabilitätsbedingungen für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen und einen Abschnitt über das *Pfaff*sche Problem. Auch die *Cartan*sche Methode der alternierenden Differentialformen wird hier erläutert und auch sonst in dem Buch des öfteren angewendet. In Kap. 3 wird die allgemeine Theorie der linearen Übertragungen entwickelt. Neben klassischen Dingen wie Krümmungstensor, normale Koordinaten usw. findet sich hier z. B. auch eine lineare Übertragung, die aus einem nicht symmetrischen Fundamentaltensor entsteht und von *Einstein* für eine verallgemeinerte Feldtheorie verwendet wurde. Kap. 4 bringt sehr ausführlich die *Lie*'schen Gruppen und die Differentialgeometrie der Gruppenmannigfaltigkeiten. Dann folgen Kapitel über „Einbettung und Krümmung", über projektive und konforme Übertragungen und über „Variationen und Deformationen". Das letzte Kapitel ist verschiedenen speziellen Fragen gewidmet, wie z. B. Harmonische Mannigfaltigkeiten, Übertragungen für hybride Größen u. a. Den einzelnen Abschnitten sind Übungen beigegeben. Leider verbietet es der Raum, auf den Inhalt dieses monumentalen Werkes genauer einzugehen. Bemerkt sei nur, daß allein das Literaturverzeichnis etwa 1400 Arbeiten umfaßt. Die Darstellung ist trotz des manchmal spröden Stoffes klar und gründlich. Die erstaunliche Arbeitskraft des Verf. hat hier ein einmaliges Buch geschaffen, das in keiner mathematischen Bibliothek fehlen darf und auch für den theoretischen Physiker ein unentbehrliches Hilfsmittel sein wird.

K. Prachar, Wien

Projektive Differentialgeometrie. Von *G. Bol*. 2. Teil. V, 372 S. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht. 1954. DM 38.—.

Bereits der erste, vor 5 Jahren erschienene Teil dieser ausführlichen Darstellung der projektiven Differentialgeometrie enthielt flächentheoretische Betrachtungen; der nunmehr vorliegende 2. Band bringt eine systematische Darstellung, die den großen Stoff einer einheitlichen Behandlung unterzieht.

Damit ist das Gesamtwerk im wesentlichen abgeschlossen, wenn auch der Verf. das Erscheinen von Ergänzungsheften in Aussicht stellt, die vor allem den Aufbau der Flächentheorie in allgemeinen Parametern bringen sollen.

Es erscheint nicht wohl möglich, den Einzelheiten des Buches im Rahmen einer Besprechung gerecht zu werden. Daher will ich mich darauf beschränken, die Methode des Verf. und ihre wichtigsten Auswirkungen zu kennzeichnen. Zunächst ist hervorzuheben, daß alle Rechnungen in Asymptotenparametern durchgeführt werden. Parabolische Flächenpunkte sind daher ausgeschlossen und auf elliptischen Flächenstücken muß man mit komplexen Parametern arbeiten. Es werden nun Transformationen der Parameter $u = f(u^*)$, $v = g(v^*)$ betrachtet, die mit einer bestimmten Änderung der Normierung der homogenen Raumkoordinaten verknüpft sind. Als Halbinvariante vom Gewicht (m, n)" wird eine Größe bezeichnet, die bei diesen „Sterntransformationen" den Faktor $f'^m g'^n$ annimmt. Dann werden zwei Halbinvarianten λ, μ von den Gewichten $(-1, n_0)$ bzw. $(m_0, -1)$ willkürlich gewählt und mit ihrer Hilfe eine „halbinvariante Differentiation bezüglich λ, μ" erklärt. Durch die Freiheit in der Wahl der beiden Halbinvarianten wird die nötige Schmiegsamkeit des Rechenverfahrens gewährleistet, die es gestattet, dem jeweils vorliegenden Problem mit möglichst geringem Rechenaufwand beizukommen. So werden z. B. die in der bisherigen Literatur eingeführten Projektivnormalen einheitlich erfaßt, sie entsprechen jeweils verschiedener Wahl von λ, μ. Allgemein beweist der Verf., daß jede Geradenkongruenz, die durch jeden Flächenpunkt eine nicht-tangentiale Gerade schickt, bei passender Wahl der „Grundhalbinvarianten" als Kongruenz der zugehörigen Projektivnormalen erscheint. Einer ausführlichen Theorie der Kurven und Kurvensysteme auf einer Fläche ist ein besonderes Kapitel gewidmet, hier sei hervorgehoben, daß auch zu jeder einparametrigen Kurvenschar, deren Kurven die Asymptotenlinien nicht berühren, ein halbinvarianter Differentiationsprozeß und damit eine eindeutig bestimmte Normalkongruenz gehört. Erwähnenswert sind ferner noch die verschiedenen sich darbietenden Variationsprobleme, so wird z. B. für einen bestimmten einfachen Typus von Kurvenproblemen auf einer gegebenen Fläche gezeigt, daß sich bei passender Wahl der Grundhalbinvarianten die Extremalen als geodätische Linien einer Riemannschen (oder Gauß'schen) Maßbestimmung auffassen lassen. Das Schlußkapitel behandelt die Flächentheorie nach *Wilczynski*, die sich durch besonders einfache Ableitungsformeln auszeichnet und stellt damit die Verbindung mit der ältesten systematischen Darstellung der projektiven Differentialgeometrie her.

Lehrer und Lernende werden aus dem reichhaltigen und gut lesbaren Werk reiche Belehrung und Anregung schöpfen. *J. Radon*, Wien

Nichteuklidische Geometrie. Von *R. Baldus* und *F. Löbell*. Dritte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 970.) Mit 70 Textabb., 140 S. Berlin: W. de Gruyter. 1953. DM 2.40.

Die vorliegende 3. Auflage des bekannten, erstmals 1927 erschienenen Bändchens von *R. Baldus* wurde nach dem knapp vor Kriegsende erfolgten Tod des Verfassers jetzt von *F. Löbell* besorgt. An der bewährten Darstellung, die eine außerordentlich klare Einführung in die hyperbolische Geometrie der Ebene bietet, wurde kaum etwas geändert.

Nach einer historischen Einleitung, die die Wandlung der Frage nach einem Beweis des euklidischen Parallelenaxioms zur Frage nach dessen Beweisbarkeit überhaupt aufzeigt, wird — unter weitgehender Anlehnung an *Hilbert* — der Grundstock der vom Parallelenaxiom unabhängigen Sätze einer „absoluten"

Geometrie aufgestellt. Einer kurzen, der euklidischen Geometrie gewidmeten Einschaltung folgt dann das eingehende Studium der hyperbolischen Geometrie in der *Cayley-Klein*'schen Realisierung, wobei auch Trigonometrie und Flächenmessung zur Sprache kommen. Die elliptische Geometrie wird — als auch einem Axiom der hier erklärten absoluten Geometrie widersprechend — nur im Schlußwort gestreift. Auf räumliche Erweiterungen und andere Deutungen wird nicht eingegangen. Der Rahmen ist mithin von vornherein ziemlich eng abgegrenzt, dafür wird aber besonderes Gewicht auf saubere und eindringliche Herausarbeitung der Problematik und anschauliche Erfassung aller Einzelheiten gelegt, worin besondere Vorzüge des ansprechenden Werkchens zu erblicken sind.

W. Wunderlich, Wien

Cours de géométrie infinitésimale. Von *Gaston Julia*. Zweite Auflage. 2. Heft: Cinématique et géometrie cinématique. 80 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955.

Das vorliegende Heft behandelt die Kinematik des Punktes und des starren Körpers im Hinblick auf die Anwendungen in der Differentialgeometrie. Da der Inhalt sich von dem der ersten Auflage nur unwesentlich unterscheidet, genüge der Hinweis, daß nach Behandlung der Bewegung eines Punktes zuerst Translation, Rotation und Schraubung, dann die allgemeine Bewegung des starren Körpers bis zur Betrachtung der Beschleunigungen diskutiert werden. Hierauf wird die Relativbewegung betrachtet und zum Schluß die Ermittlung der endlichen Bewegung aus der Kenntnis der Momentanbewegung besprochen. Einige Übungsaufgaben finden sich im Text, i. a. wird auf die Aufgabensammlungen von *Julia* bzw. *Béghin* und *Julia* verwiesen. Da im Rahmen des Gesamtwerkes noch ein weiteres Kapitel über Kinematik vorgesehen ist, wird man nur die einfachsten Grundlagen behandelt finden, diese aber klar und gründlich. *J. Radon*, Wien

Grundlagen der Analytischen Topologie. Von *G. Nöbeling*. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: Band 72.) X, 221 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 33.—, geb. DM 36.60.

Die Untersuchungen der letzten zwei Jahrzehnte haben die begriffliche Gestalt der mengentheoretischen Topologie und der Theorie der reellen Funktionen in entscheidender Weise verändert. Die Theorie interessiert sich nicht mehr allein für die Punktmengen eines Raumes und der auf diesen Mengen definierten Funktionen, sondern sie erweitert sich zu einer Theorie von abstrakt gegebenen, teilweise geordneten Systemen (Vereine und Verbände) und zugeordneter Begriffe wie Topologie, Struktur, Raster, Filter, Ideal und die Untersuchung der Struktur dieser Systeme erscheint als die Hauptaufgabe der ganzen Theorie. Die Theorie gewinnt durch diese abstrakte Wendung an Allgemeinheit und wird durchsichtiger, denn die Bedeutung der jeweils gemachten Annahmen tritt stets deutlich hervor. Das vorliegende Buch unternimmt es nun, diese moderne Entwicklung systematisch darzustellen und in allen Teilen der Theorie zur Geltung zu bringen. Diese Aufgabe wurde von dem bekannten Verf. in hervorragender Weise gelöst. Das Buch enthält viele neue Untersuchungen und an vielen Stellen sind die Sätze allgemeiner formuliert und die Beweise eleganter und kürzer geführt als in den Originalarbeiten. Die Darstellung zeichnet sich durch Klarheit der Sprache aus. Das Studium des Buches erfordert keine besonderen Vorkenntnisse, aber natürlich eine gewisse Schulung im abstrakten Denken. Wir lassen nun, über den Inhalt zu orientieren, die Überschriften der einzelnen Kapitel folgen: I. Vorbereitungen (Vereine, Verbände, Homomorphismen und Isomorphismen, Raster, Filter und Ideale, Darstellungs- und Erweiterungssätze,

Produktvereine und -Verbände). II. Topologische Strukturen (Grundbegriffe, Adhärenz und Häufung, Topologie von Untervereinen, Stetige Homomorphismen, Homöomorphien, Trennungsaxiome, m-Kompaktheit und Vollkompaktheit, Dichtigkeit, Zusammenhang, Ableitung nach einem Filter oder einem Ideal, Topologische Restklassenvereine und Produktverbände, Darstellungs- und Erweiterungssätze). III. Uniforme Strukturen (Uniforme und reell-uniforme *Boole*verbände, Uniforme Räume, Gleichmäßig stetige Homomorphismen, Uniforme Konvergenz, Uniforme Struktur- und Trennungsaxiome, Uniformierbare und vollständig uniforme *Boole*verbände, Darstellungs- und Erweiterungssätze).

E. Hlawka, Wien

Methods of Mathematical Physics. Von *R. Courant* und *D. Hilbert*. Erste englische Ausgabe, übersetzt aus dem deutschen Original. Band I: XVI, 561 S. New York-London: Interscience Publishers. 1953. $ 9.50.

Die beiden Auflagen des ersten Bandes in deutscher Sprache erschienen 1924, bzw. 1930 im Springer-Verlag in Berlin und wurden in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **34**, 13 und **39**, 48) ausführlich besprochen. Da die zweite Auflage längst vergriffen ist, so ist es sehr zu begrüßen, daß das Buch wieder erschienen ist. Die englische Ausgabe enthält einige Ergänzungen und Verbesserungen gegenüber der zweiten deutschen Auflage. Das Buch ist den Mathematikern und den Physikern best bekannt und so erübrigt sich eine nochmalige Besprechung des Werkes, das doch seit 30 Jahren das Standardwerk der mathematischen Physik ist.

N. Hofreiter, Wien

Materie als Feld. Eine Einführung. Von *F. Hund*. Mit 40 Textabb., VIII, 418 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 48.—, geb. DM 52.—.

Während die üblichen Darstellungen der Quantentheorie von der klassischen Punktmechanik ausgehen und dann erst den Dualismus Teilchen-Feld berücksichtigen, wird hier der umgekehrte Weg eingeschlagen. Die Untersuchungen der letzten Zeit scheinen zu zeigen, daß dieser Weg weiterführt. Ein besonderer Zug des Buches ist es, nicht mit der allgemeinsten Feldtheorie zu beginnen, sondern zunächst von den einfachsten Feldern auszugehen. So beginnt das Buch mit dem Feld, welches am genauesten bekannt ist, nämlich mit dem elektromagnetischen Feld und geht dann zum einfachsten, nicht relativistischen Wellenbild der Materie über, berücksichtigt aber schon, daß Materiewellen elektrische Ladungen übertragen können. An einfachen Modellen werden die grundlegenden Dinge, wie Tunneleffekt, Eigenschwingungen in Potentialmulden, Streuung von Materiewellen, Kräfte des Materiefeldes, chemische Kraft, erläutert. Dann wird die Relativitätstheorie berücksichtigt, die schon erlaubt, die Materieerzeugung, so weit die Quantentheorie noch nicht eingreift, verständlich zu machen. Nach diesem anschaulichen Wellenbild wird erst die Quantentheorie ins Spiel gebracht und die Feldquantelung durchgeführt. Die Theorie des Spin wird zunächst im einfachsten Fall: Spin = 1 auseinandergesetzt, und zwar auch hier zuerst im anschaulichen Wellenbild. Die bedeutend schwierigere Theorie des halbzahligen Spin wird in sehr geschickter und leichtverständlicher Weise behandelt. Erst nach dieser Theorie wird die allgemeine Feldtheorie dargestellt, die dem Leser nun keinerlei Schwierigkeiten mehr bereiten wird. Nun folgen zwei sehr interessante Kapitel, die bis zu den aktuellsten Forschungen führen: „Verknüpfung der Materiearten" (Kopplungen der Felder und Kernkräfte) und „Elementarteilchen" (Reaktionen und Feldquantelung, Störungsrechnung mit Feldquantelung, Zerfall von Elementarteilchen, Streuvorgänge). Die Darstellung, gerade

dieses Kapitels ist hervorragend. Es gibt wohl augenblicklich kein anderes Buch in deutscher Sprache, welches diese Dinge in so einfacher, auf das Wesentliche gerichtete, Weise behandeln würde.

Der ganze Aufbau des Buches, die Ausführlichkeit und Klarheit der Darstellung, die das Physikalische immer in den Vordergrund stellt, macht die Lektüre sehr leicht. Jedem Mathematiker, Physiker und Chemiker bietet dieses Buch wohl den bequemsten Zugang zu diesem wichtigen Gebiet.

E. Hlawka, Wien

Aufgaben aus der Hydromechanik. Von *K. Federhofer*. 245 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 235 Textabb., V, 221 S. Wien: Springer-Verlag. 1954. S 144.—, geb. S 162.—; sfr. 24.50, geb. sfr. 27.70; $ 5.70, geb. $ 6.45; DM 24.—, geb. DM 27.—.

Die 245 der technischen Praxis entnommenen Übungsbeispiele mit ihren z. T. sehr ausführlich dargestellten Lösungen, die dem Buch stellenweise fast den Charakter eines Lehrbuches geben, entsprechen dem Stoff der vom Verfasser gehaltenen Vorlesung über Hydromechanik; die reiche Lehrerfahrung und die bekannte Kunst der Darstellung bei *Federhofer* werden das Buch sicher zu einer beliebten Hilfe auch für das Selbststudium machen. Die einzelnen Teile sind: Druck in schwerer und gepreßter Flüssigkeit, Niveauflächen, Druck auf ebene Flächen, Druck auf krumme Flächen, Auftrieb und Schwimmen, Ausfluß aus Behältern, Laminare Strömung, Rohrleitungen, offene Gerinne, Schwingungen, Impuls- und Energiesatz, mathematische Strömungslehre, Grundwasserströmung, Modellregeln.

H. Hornich, Graz

Theoretische Hydromechanik. Von *N. J. Kotschin, I. A. Kibel, N. W. Rose*. Band 1: Mit 179 Textabb., IX, 507 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 36.—.

Das Buch ist die Übersetzung eines russisch erschienenen Lehrbuches der theoretischen Hydromechanik. Die Übersetzung wurde von *J. Sauer* besorgt und von *K. Krienes* wissenschaftlich redigiert. Sie entspricht dem Bedürfnis, gute Lehrbücher, die in der Sowjetunion erschienen sind, auch denjenigen zugänglich zu machen, die der russischen Sprache nicht mächtig sind.

Die Darstellung beginnt mit kinematischen Betrachtungen über flüssige Medien. Kap. II bringt die Grundgleichungen für die Bewegung einer idealen Flüssigkeit. Hier findet sich auch eine pädagogisch ausgezeichnete Erklärung der Problemstellung bei der Integration dieser Grundgleichungen sowohl für den Fall einer kompressiblen als auch einer inkompressiblen Flüssigkeit. Als nächstes wird die Hydrostatik behandelt und dann folgen die einfachsten Bewegungen einer idealen Flüssigkeit, die stationäre und die wirbelfreie Strömung. Die *Bernoulli*'sche Gleichung, auch für isotherme und isentrope Bewegung wird hergeleitet und die Bedeutung der komplexen Funktionentheorie für die ebene wirbelfreie Strömung erläutert. Ausführlich werden nun die Sätze über Wirbelbewegungen von *Helmholtz, Thomson, Friedman* und *Bjerknes* behandelt. Die Theorie *v. Karman*'s über die Bildung von Wirbelstraßen wird gründlich besprochen und an zahlreichen Beispielen erläutert. Als nächstes finden wir die Untersuchung der ebenen Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit und der dabei auftretenden Kräfte. Dieses Kapitel ist sehr ausführlich gehalten und es werden eingehend die Methoden besprochen, die von *Kutta-Joukowski, Blasius-Tschapligin, Kirchhoff, Michell, Levi-Civita* u. a. für Probleme

solcher Art entwickelt wurden. Hier finden sich besonders zahlreiche konkrete Beispiele durchgeführt, wobei auch manchmal neuere Beiträge russischer Autoren berücksichtigt wurden. Nachdem das analoge aber schwierigere Problem der räumlichen Bewegung betrachtet wird, folgen im achten Kapitel die Wellenbewegungen einer idealen Flüssigkeit. Hier finden sich u. a.: Wellen an der Trennfläche zweier Flüssigkeiten, Kapillarwellen, „Trochoidenwellen", Bewegung eines Körpers unter einer freien Oberfläche, Schiffswellen, Schwingungen einer Flüssigkeit in einem Gefäß, die statistische und die Kanal-Theorie der Gezeiten, Wellenbewegungen in der rotierenden Atmosphäre. Wie vielleicht schon aus dieser kurzen Inhaltsangabe hervorgeht, ist das Buch sehr reichhaltig, besonders auch an konkreten Problemen. Dazu kommen noch zahlreiche interessante Aufgaben, die zum großen Teil mit Lösungen versehen sind und weiter eine wunderbar ausführliche, verständliche Darstellungsweise, die das Lesen vom Anfang bis zum Schluß zu einem wahren Vergnügen machen. — Der zweite Band wird die kompressiblen Flüssigkeiten genauer behandeln, als dies im vorliegenden Band geschehen ist.

K. Prachar, Wien

Traité de Mécanique Rationelle. Von *P. Appell.* Zweite Auflage. Band V: Eléments de Calcul Tensoriel, Applications géometriques et mécaniques. X, 202 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955.

Die erste Auflage des von *R. Thiry* verfaßten Bandes erschien vor 30 Jahren; da die 2. Auflage zuerst 1933 erschien und gegenüber der ersten wenig verändert war, dürfte ein kurzer Hinweis auf den Inhalt genügen. Zuerst wird nach einer kurzen Behandlung der algebraischen Formen 1. und 2. Grades der Tensorkalkül (ohne Benutzung der Parallelverschiebung) bis zur Einführung des Krümmungstensors entwickelt. Dann folgen Anwendungen auf Geometrie und Mechanik, zuerst im euklidischen Raum, die Parallelverschiebung und die Charakterisierung der euklidischen Räume. Erst jetzt wird die Geometrie der allgemeinen Riemannschen Räume bis zur Einführung von Riemanns Normalkoordinaten entwickelt, an die die Behandlung der Räume konstanter Krümmung als einfachste Anwendung angeschlossen wird. Es folgt die Behandlung der Weylschen Geometrie sowie ein kurzer Bericht über die Methoden von *E. Cartan.* Den Abschluß bildet ein Kapitel über die nicht-euklidischen Geometrien im engeren Sinn, das sich durch die saubere Auseinanderhaltung der rein abstrakt-logisch aufgebauten Geometrien, ihrer räumlich-anschaulichen Deutung und ihrer physikalischen Realisierung auszeichnet.

Die klare und ausführliche Darstellung macht das Werk zu einer ersten Einführung in das sowohl mathematisch wie physikalisch wichtige Gebiet vortrefflich geeignet.

J. Radon, Wien

Theoretical Elasticity. Von *A. E. Green* und *W. Zerna.* 50 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1954.

Das vorliegende Buch befaßt sich hauptsächlich mit drei Teilgebieten der Elastizitätslehre, die in den letzten Jahren unter neuen Gesichtspunkten behandelt wurden. Es sind dies die Theorie der endlichen elastischen Deformationen, als deren Spezialfall die klassische Infinitesimaltheorie aufscheint, ferner die Anwendung funktionentheoretischer Methoden, die unabhängig von einander in britischen und russischen Zeitschriften erschienen, auf zweidimensionale elastische Probleme und schließlich die Theorie der Schalen. Dem Werke wird eine mathematische Einleitung vorausgeschickt, in der die Grundbegriffe der Tensoranalysis (in Indizesschreibweise, die konsequent beibehalten wird), der Differential-

geometrie und der Funktionentheorie so weit gebracht werden, daß ein Verständnis des Werkes auch für den Nichtmathematiker ohne Zuhilfenahme eines Nachschlagewerkes möglich erscheint. *F. Blaha*, Wien

Technical Mathematics. Von *H. S. Rice* und *R. M. Knight*. XIV, 748 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1954. $ 6.50.

Aus dem Titel könnte man vermuten, daß diesem Buch Vorlesungen für Hörer an Technischen Hochschulen zugrunde liegen. Dies ist aber nicht der Fall. Es ist ein einführendes Lehrbuch, das fast nur elementare Mathematik behandelt, aber viele Anwendungen enthält, die für Techniker von Interesse sind. Das Buch ist also ein Lehrbuch für Schüler der Oberstufe der Mittelschulen und der höheren Gewerbeschulen. Natürlich werden auch die Lehrer an solchen Schulen dieses Buch gern benützen und vieles im Unterricht verwenden können. Das Buch ist auch Schülern zu empfehlen, die ihre Kenntnisse auffrischen sollen. Es enthält: elementare Algebra einschließlich der Determinanten zweiter und dritter Ordnung, Radikale und Logarithmen, arithmetische und geometrische Reihen, Zinsen- und Rentenrechnung, ebene Trigonometrie und Analytische Geometrie, Vektoralgebra, Darstellung von Vektoren durch komplexe Zahlen. Im Anhang sind fünfstellige Logarithmentafeln der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. Das Wertvollste an dem Buch sind die zahlreichen Aufgaben. Es sind gegen 5000 Aufgaben, die aus verschiedenen Anwendungsgebieten entnommen sind. Die Darstellung ist sehr breit und der Auffassungskraft der Schüler angepaßt. *N. Hofreiter*, Wien

Der mathematische Unterricht für die sechzehn- bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Herausgegeben von *H. Behnke*. 332 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1954.

Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission hatte die Unterkommissionen in den verschiedenen Staaten aufgefordert, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Amsterdam (1954) über den mathematischen Unterricht für die 16- bis 21-jährige Jugend zu berichten. Die Unterkommission der deutschen Bundesrepublik ist dieser Aufgabe in vorbildlicher Weise nachgekommen. Die Berichte, die von 30 Mitarbeitern geliefert wurden, sind nun in Buchform erschienen und für alle pädagogisch Interessierten von großem Wert. Trotz der großen Mannigfaltigkeit in den einzelnen Berichten ist doch ein einheitliches Ganzes geworden. Die deutsche Bundesrepublik gliedert sich derzeit in 7 Länder und 2 Stadt-Staaten. Alle diese 9 Staaten sind kulturell selbständig, da kein einheitliches Kultusministerium besteht. Daher kommt es, daß verschiedene Lehrpläne und verschiedene Schultypen existieren. Einheitlich wurde wieder das 9. Schuljahr in den höheren Schulen eingeführt und der Tiefstand, der in den Jahren 1933—45 herrschte, ist überall überschritten. Von der pragmatischen Einstellung des Nationalsozialismus hat man sich abgekehrt und wieder höhere Bildungswerte angestrebt. Es gibt wieder mehr Stunden für Mathematik, wenn auch noch lange nicht so viele wie einst. Mathematik hat noch keineswegs die ihr gebührende Stellung. So ist Mathematik in der obersten Klasse der Gymnasien in Bayern nur Wahlfach. Einen sehr großen Aufschwung hat das technische Schulwesen genommen. Dazu gehören die Berufsschulen, die Fachschulen, die Ingenieurschulen und die Technischen Hochschulen. Natürlich ist dort Mathematik Hilfswissenschaft. Es kommt mehr auf das Können denn das Wissen an. Auch an den Technischen Hochschulen haben sich die Vorlesungen aus Mathematik in Zielsetzung und Behandlungsweise dem Geist der Technik anzupassen. Ergänzungs- und Sondervorlesungen haben höheres Niveau. So

bleibt die Ausbildung der jungen Mathematiker vorwiegend den Universitäten vorbehalten. Sie sorgen in erster Linie für die Ausbildung der Lehramtskandidaten und der Doktoranden und die Heranbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses. Einzelne Universitäten sind auch Pflegestätten für angewandte Mathematik und bilden die Diplommathematiker aus. In der Deutschen Bundesrepublik gibt es derzeit 16 Universitäten und 7 Technische Hochschulen. Der Aufschwung an allen Hochschulen in den letzten 10 Jahren ist staunenswert. Während sich die Zahl der Professoren gegenüber 1932 nur wenig erhöht hat, ist die Zahl der Lehrkräfte verdoppelt worden. Das geschah durch die Errichtung der Diätendozenturen und die starke Vermehrung der Assistentenstellen. Die mathematischen Institute wurden vielfach neu und modern eingerichtet. Das Buch schließt mit einem 30 Seiten starken Verzeichnis von Lehrbüchern zur Mathematik.

N. Hofreiter, Wien

Arithmetik und Geometrie. Von *F. Prowaznik* und *F. Klusacek*. 5. Teil: Mit 250 Textabb., 290 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1954. S 39.—.

Der lang erwartete fünfte Teil des Unterrichtswerkes ist nunmehr erschienen. Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis gibt an, was an den österreichischen Mittelschulen (Gymnasium, Realgymnasium, Realschule, Frauenoberschule) in der fünften Klasse (im fünften Schuljahr) im Mathematikunterricht zu bewältigen ist. In der Arithmetik sind es die vier Abschnitte: Lineare Gleichungen und Funktionen, Potenzen und Potenzfunktionen, Wurzeln und Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen. An Realschulen wird zusätzlich der Logarithmus und der logarithmische Rechenschieber besprochen. In der Geometrie ist der auf der Unterstufe besprochene Lehrstoff zu wiederholen, zu festigen, zu ergänzen und zu vertiefen.

Was diesen Band so auszeichnet, ist das Bestreben der Verfasser, das Verständnis für Schlußweisen und Beweisverfahren zu wecken; es ist ferner das Bemühen, die Klarheit des Denkens durch begriffliche Sauberkeit und durch besondere Pflege des sprachlichen Ausdrucks auszubilden. Echte, dem Verständnis des Schülers angepaßte Sachaufgaben unterstützen dieses Bemühen. Größter Wert wurde auf eine genaue, eingehende und vertiefte Darlegung gelegt (siehe z. B. S. 118). Geschichtliche Bemerkungen sind begrüßenswerte Ergänzungen. Die schönen und übersichtlichen Figuren seien besonders hervorgehoben.

In diesem ausgezeichnete Lehrbuch spiegeln sich das pädagogische Geschick und die reiche Erfahrung der Verfasser wieder.

J. Laub, Wien

Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie für Realschulen und Realgymnasien. Von *J. Barchanek*. Neunte Auflage. Bearbeitet von *E. Ludwig* und *J. Laub*. Mit 264 Textabb. und 4 Tafeln, 220 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1954. S 40.—.

Das bekannte Lehrbuch ist nunmehr völlig neubearbeitet in neunter Auflage wieder erschienen. Die beiden Bearbeiter haben dabei einerseits ihre reiche Erfahrung in den Dienst der Sache gestellt und anderseits viele moderne Gesichtspunkte zur Geltung gebracht. Alles Entbehrliche wurde weggelassen und der verbleibende Lehrstoff einer modernen Behandlung zugeführt und da und dort auch wesentlich ergänzt. Aus durchaus richtigen methodischen Erwägungen heraus wird die „Eroberung des Raumes" durch die Darstellung einfacher geometrischer Körper in die Wege geleitet, woran sich dann erst die Darstellung der geometrischen Grundgebilde und die Besprechung der Grundaufgaben anschließt, wie denn überhaupt der gesamte Lehrstoff an Beispielen erarbeitet wird.

An Einzelheiten sei folgendes erwähnt. Die Aufgaben, die Normalstellung der Geraden zur Ebene betreffend, wurden ihrer Wichtigkeit entsprechend in einem eigenen Kapitel zusammengefaßt. Die Behandlung der gegenseitigen Schnitte von Strahlenflächen wurde auf die Durchführung einiger weniger aber dafür sehr anschaulichen Beispiele beschränkt. Die Drehflächen 2. Grades werden eingehender behandelt als bisher. Die Achsonometrie wurde einer gründlicheren Behandlung zugeführt, die insbesondere durch die Hinzunahme des Einschneideverfahrens bereichert wurde. Völlig umgearbeitet wurde der Abschnitt über die kotierte Projektion, wobei aus methodischen Gründen die Darstellung der Geländefläche vorangestellt wurde. Ein in der 8. Auflage enthaltener, mehr oder weniger wichtigen Anwendungen, Zusammenfassungen etc. gewidmeter Abschnitt wurde fortgelassen.

Die den einzelnen Abschnitten beigegebenen zahlreichen Übungsaufgaben sind durchwegs kotiert und jeweils dem Schwierigkeitsgrad nach geordnet. Die zahlreichen und vielfach neu gezeichneten Figuren sind überaus anschaulich und vorbildlich ausgeführt.

Zweifellos wird das Buch auch in der neuen Auflage sich wieder der alten Beliebtheit erfreuen. *L. Hofmann*, Wien

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von *K. Wellnitz*. Mit 19 Textabb., 116 S. Braunschweig-Berlin-Stuttgart: F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 3.90.

Das als Beiheft für den mathematischen Unterricht bezeichnete Bändchen ist vor allem zur Verwendung in den mathematischen Arbeitsgemeinschaften auf der Oberstufe der höheren Schulen bestimmt. Im ersten Teil wird die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung ausführlich in 12 Kapiteln behandelt; in den letzten drei dieser Kapitel werden das Bernoullische Theorem, die Mendelschen Gesetze und die geometrische Wahscheinlichkeit besprochen. In diesem ersten Teil werden bereits Gedankengänge und Begriffe der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung systematisch vorbereitet. Im zweiten Teil wird die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung skizzenhaft dargestellt. In diesem Zusammenhang werden jene Gedankengänge angeführt, die eine Kritik der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgelöst und zur modernen Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit geführt haben. Das Büchlein vermittelt auch einen Einblick in die moderne Art der Behandlung von Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gibt die einschränkenden Bedingungen an, unter denen die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit der Kritik standhalten kann.

Das überaus empfehlenswerte Bändchen, das die Kluft zwischen der Schul- und Hochschulmathematik überbrücken soll, enthält 38 ausgeführte Beispiele, 67 Übungsaufgaben und eine im Anhang erfolgte Zusammenstellung der verwendeten Definitionen und Lehrsätze. *J. Laub*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.

Von Dr. phil. **Adalbert Duschek,** o. Prof. der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien, und Dr. techn. **August Hochrainer,** Direktor im Hochspannungsinstitut der AEG, Kassel. In drei Teilen.

Soeben erschien:

Teil I: **Tensoralgebra.** Dritte Auflage, unveränderter Abdruck der zweiten Auflage. Mit 26 Textabbildungea. VI, 129 Seiten. 8°. 1954.
Steif geheftet S 72.—, DM 12.—, $ 2.85, sfr. 12.20.

Früher erschien:

Teil II: **Tensoranalysis.** Mit 64 Textabbildungen. VII, 338 Seiten. 8°. 1950. Steif geheftet S 148.—, DM 24.80, $ 6.—, sfr. 26.—

Demnächst wird erscheinen:

Teil III: **Anwendungen in Physik und Technik.** Mit etwa 25 Textabbildungen. Etwa 200 Seiten. 8°. 1955.

Soeben erschien:

Theorie ideal plastischer Körper.

Von W. **Prager,** Eng. D., Professor of Applied Mechanics, Brown University, Providence, R. I., USA, und **P. G. Hodge, Jr.,** Ph. D., Associate Professor of Applied Mechanics, Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y., USA. Ins Deutsche übertragen von Dr. phil., Dr. techn. **F. Chmelka,** Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 97 Textabbildungen. X, 274 Seiten. Gr.-8°. 1954.
Ganzleinen S 198.—, DM 33.—, $ 7.85, sfr. 33.80

In der letzten Zeit gewinnt die Plastizitätstheorie immer mehr an Bedeutung. Sie macht Vorgänge, wie Walzen, Ziehen, Pressen usw., der Berechnung zugänglich, sie ermöglicht eine der Wirklichkeit entsprechende Bestimmung des Sicherheitsfaktors gegen Kollaps von Tragwerken und anderes mehr. Bisher gab es kein modernes, einführendes Lehrbuch in die Plastizitätstheorie in deutscher Sprache, während in den USA und in England bereits deren mehrere existieren. Die vorliegende Übersetzung des grundlegenden Werkes aus dem Englischen ins Deutsche schließt somit eine empfindliche Lücke, indem sie dieses wichtige Wissensgebiet nun auch dem deutschsprachigen Leser- und Forscherkreis zugänglich macht. Vielleicht trägt dieses Buch dazu bei, der deutschen Forschung, die auf dem Gebiet der Plastizitätstheorie einmal führend war, zu helfen, den ihr von den USA abgewonnenen Vorsprung wieder aufzuholen. Das Buch geht, was Vorkenntnisse anbelangt, von durchaus elementaren Voraussetzungen aus, und bringt nicht nur eine Darstellung der bereits seit langem gelösten Grundaufgaben, sondern umfaßt auch die neuesten Erkenntnisse der Theorie.